

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die durch $f(x) = \frac{7}{6-5x}$ definierte Funktion.

- a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für f zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ und bestimme deren Konvergenzradius.

- b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.
- c) Konvergiert die Potenzreihe aus b) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 10:

- a) Für $x \in \mathbb{R}$ berechne man die Ableitung von $\operatorname{arsinh} x$.

- b) Für die Binomialkoeffizienten $\binom{a}{n}$ weise man für $a = -1/2$ die Gültigkeit folgender Formel nach:

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}.$$

- c) Man berechne die Potenzreihe von $\operatorname{arsinh} x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten.

Aufgabe 11:

- a) Von der Funktion $\cos(x)$ erinnert man nur die Stützstellen

x_i	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\cos x_i$	0	1	0

Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

- b) Man berechne $p_2(\pi/5)$ als Näherungswert für $\cos(\pi/5)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? (Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.)
- c) Man zeichne $\cos(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.
- d) Nun erinnert man sich noch, dass $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ gilt. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

Aufgabe 12:

Man berechne zur Funktion $f(x) = x^3$ den natürlichen kubischen Interpolationsspline $s(x)$ zu den Knoten $x_j = j$ für $j = 0, 1, 2, 3$ und zeichne die Funktionsgraphen von $s(x)$ und $f(x)$. Warum kann $s(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmen?

Abgabetermin: 9.5. - 13.5. (zu Beginn der Übung)