

Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



07. Juli 2008

Beachtungswertes

- ▶ Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- ▶ Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html>
- ▶ Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- ▶ Übungshefte: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.
- ▶ Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html>**

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

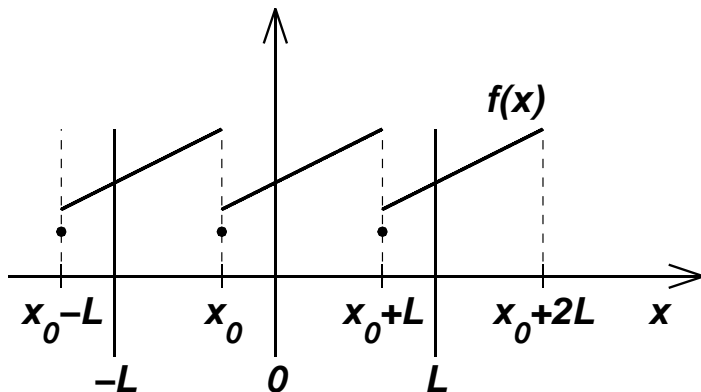


Abbildung 3.20: L -periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen $[x_0 + kL, x_0 + (k + 1)L)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Definition 3.18: (trigonometrisches Funktionensystem)

Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das trigonometrische Funktionensystem

$$\{1, \sin nx, \cos nx\}.$$

Ein Ausdruck der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

heißt trigonometrische Reihe,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

trigonometrisches Polynom.

Orthogonalitätsrelationen für das trigonometrische Funktionensystem ($k, n \in \mathbb{N}$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx = 0 ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \delta_{nk} \pi ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \delta_{nk} \pi .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Trigonometrische Reihen, Fourier-Koeffizienten:

Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots.$$

Fourier Koeffizienten von f und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

zu f assoziierte Fourierreihe.

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- ▶ **punktweise gegen f .**
- ▶ **In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.**
- ▶ **An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.**

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

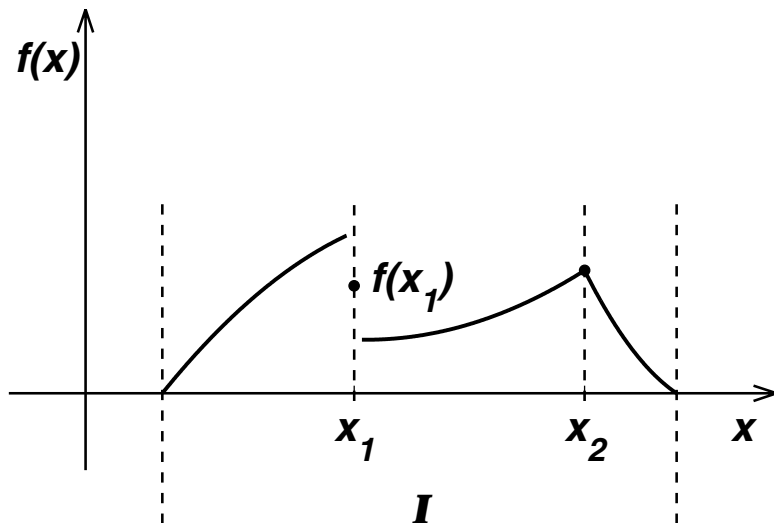


Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.30: (BESSELSche Ungleichung) Für alle auf $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f(x)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

Dabei sind a_k, b_k die FOURIER-Koeffizienten von f .

Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die Parseval'sche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode 2π , so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f . Für ihre FOURIER-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)

Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, 2π -periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2 -Norm, d.h.

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 dx ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2) \right) .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

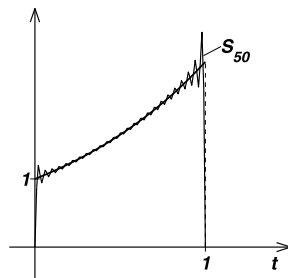
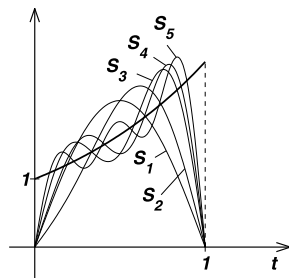


Abbildung 3.28-3.29: Approximation von e^t auf $[0, 1]$ durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)
Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} .$$

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist.