Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

28. April 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

Definition 2.36: (uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, erklärt und auf jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, Riemann integrierbar. Wir setzen

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b < \infty,$$

und

$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b = \infty.$$

Integrale des Typs a) oder b) heißen uneigentliche Integrale. Wir sagen, daß ein uneigentliches Integral konvergiert, falls der entprechende Grenzwert exisitiert. Ansonsten sprechen wir von Divergenz.

Buch Kap. 2.16 – Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale

Satz 2.41: Die Funktion $f(x)$ sei über jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ Riemann integrierbar.

Das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists X > a\ \forall X < x_1 < x_2 : \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

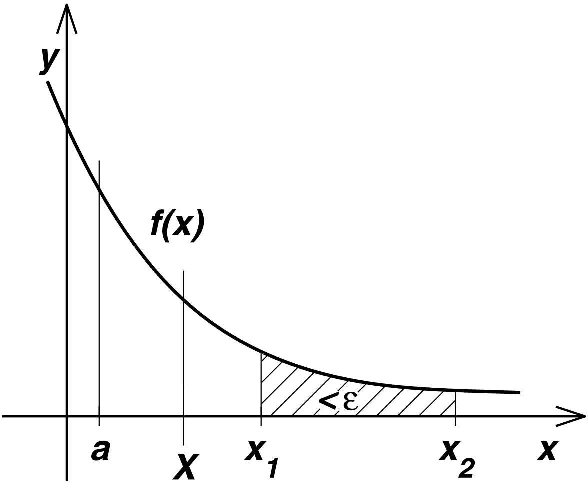

Abbildung 2.63: Zur Konvergenz uneigentlicher Integrale der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

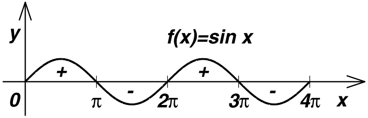

Abb. 2.64: Zum Integral $\int_0^\infty \sin x \, dx$,

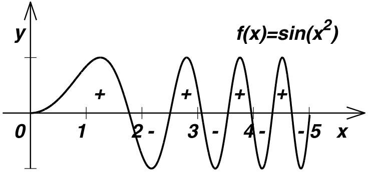

Abb. 2.65: Zum Fresnel Integral $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$

Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

- **Satz 2.42: Sei $f(x) \geq 0$ und monoton fallend.**

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

- **Satz 2.43: $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq f(x)$ auf $[a,\infty)$, dann:**

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \;\text{ konvergiert}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent } \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergiert}\,.$$

- **Satz 2.44: $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.**
- **Satz 2.45: f sei über jedes beschränkte Teilintervall von $[a,\infty)$ $(a > 0)$ integrierbar, $c \geq a$ und $M > 0$.**
  a) **$f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x\geq c}$ mit $\alpha > 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent,**
  b) **$f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x\geq c}$ mit $\alpha \leq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent.**