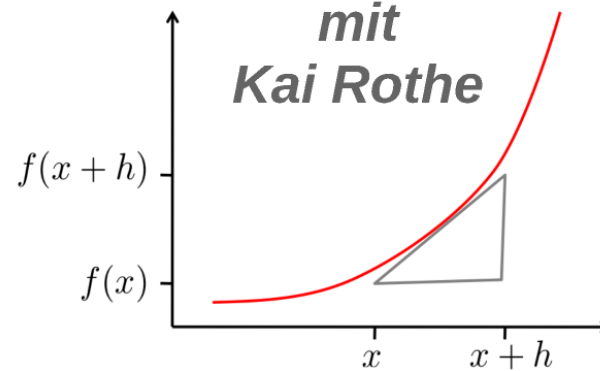


# Analysis I

Winter 2016/17

**Jörn Behrens**  
*mit*  
**Kai Rothe**



Taylor-Entwicklung

Buch Kapitel 2.9

# Polynome

## Polynom

Erinnerung: Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \\ = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

## Horner Schema

Beobachtung:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\ = x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0.$$

## Horner Schema

Satz: Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  Polynom. Sei weiter  $h_k = a_n, b_j = a_j + b_{j+1}x_0$  für  $k = (n-1) : -1 : 0$  (d.h.  $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ ), und  $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k x^k$ . Dann gilt für  $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{h_0}{x - x_0}.$$

1

# *Polynom*

**Erinnerung:** Polynom

**Beobac**

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0:n} a_k x^k \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

# *Polynom*

**Erinnerung:** Polynom

**Beobac**

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0:n} a_k x^k \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

**Frage: Wie auswerten?**

# Horner Schema

**Beobachtung:**

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\ &= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

$$x + a_0.$$

# ***Beispiel***

**Beispiel:**  $n = 4$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x(x(x(a_4x + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

# Beispiel

**Beispiel:**  $n = 4$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x(x(x(a_4x + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

**Idee:** Rekursives Berechnungsschema für die Berechnung von  $p_4(x_0)$ .

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_3 + b_4x_0$$

$$b_2 = a_2 + b_3x_0$$

$$b_1 = a_1 + b_2x_0$$

$$b_0 = a_0 + b_1x_0 = p_4(x_0)$$

# Beispiel

Beispiel:  $n = 4$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x(x(x(a_4x + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Idee: Rekursives Berechnungsschema für die Berechnung von  $p_4(x_0)$ .

$$b_4 = a_4$$

$$b_3 = a_3 + b_4x_0$$

$$b_2 = a_2 + b_3x_0$$

$$b_1 = a_1 + b_2x_0$$

$$b_0 = a_0 + b_1x_0 = p_4(x_0)$$

	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
+		$b_4x_0$	$b_3x_0$	$b_2x_0$	$b_1x_0$
$x_0*$	$b_4 \nearrow$	$b_3 \nearrow$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = q(x_0)$



# Horner Schema

**Beobachtung:**

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\ &= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

$$x + a_0.$$



# Horner Schema

**Beobachtung:**

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\
 &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \\
 &= x(x(\dots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \dots + a_1) + a_0.
 \end{aligned}$$

$x + a_0.$



	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
+		$b_n x_0$	$\dots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0^*$	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\dots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0).$

# Horner Schema

**Satz:** Sei  $p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$  Polynom. Sei weiter  $b_n = a_n$ ,  $b_j = a_j + b_{j+1}x_0$  für  $k = (n-1) : -1 : 0$  (d.h.  $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ ), und  $g(x) = \sum_{k=0:n-1} b_{k+1} x^k$ .  
Dann gilt für  $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}.$$

1

# Polynom- Entwicklung

## *Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle*

**Satz:** Jedes Polynom  $p_n(x)$  lässt sich für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ( $k = 0 : n$ ):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

## *Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle*

**Satz:** Jedes Polynom  $p_n(x)$  lässt sich für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}$  darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ( $k = 0 : n$ ):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

# Taylor Polynom

## Vorbemerkung

**Beobachtung:** Falls  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0, n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für  $k = 0 : n$ .

## Definition

**Definition:**

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0, n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom**  $n$ -ten Grades für die Funktion  $f$ .

- $x_0$  heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven  $y = T_n(x)$  heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve  $y = f(x)$  in der Umgebung von  $x = x_0$ .

## Restglied

Wenn  $f(x) \approx T_n(x)$ , dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

**Frage:** wie groß ist  $R_n(x)$ ?

Im Allgemeinen:  $R_n(x)$  hängt von  $f$  und  $x_0$  ab.

m-  
ung

Satz v

**Satz:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem I

## Vorbemerkung

**Beobachtung:** Falls  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für  $k = 0 : n$ .

## Vorbemerkung

**Beobachtung:** Falls  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für  $k = 0 : n$ .

**Interpretation:**  $T_n(x)$  ist ein Polynom, das an der Stelle  $x = x_0$  mit  $f$  in allen Ableitungen (bis zur  $n$ -ten Ordnung) überein stimmt.

Dieses Polynom ist das einzige mit dieser Eigenschaft.



# Definition

## Definition:

- Das Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

heißt **Taylor-Polynom**  $n$ -ten Grades für die Funktion  $f$ .

- $x_0$  heißt dann die **Entwicklungsstelle**.
- Die Kurven  $y = T_n(x)$  heißen **Schmiegeparabeln** an die Kurve  $y = f(x)$  in der Umgebung von  $x = x_0$ .

## *Restglied*

Wenn  $f(x) \approx T_n(x)$ , dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Frage: wie groß ist  $R_n(x)$ ?

Im Allgemeinen:  $R_n(x)$  hängt von  $f$  und  $x_0$  ab.

# Satz von Taylor

**Satz:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar.

Sei weiter  $x_0 \in I$  fest.

Dann gibt es für alle  $x \in I$  und zu jedem  $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$  mindestens ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied  $R_n(x)$  in der **Schlömilch-Form**.

2

# Satz von Taylor

**Satz:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar.  
Sei weiter  $x_0 \in I$  fest.

Dann gibt es für alle  $x \in I$  und zu jedem  $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$   
mindestens ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt **Taylor-Formel** mit dem Restglied  $R_n(x)$   
in der **Schlömilch-Form**.

2

**Bemerkungen:**

- In dem Fall, in dem wir über die Form des Restglieds  $R_n(x)$  wissen, gibt die Formel die Approximation  $f(x) \approx T_n(x)$  an. Die Genauigkeit ist durch den Grad  $n$  der Taylor-Polynom bestimmt.
- Die Formel  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  ist die **Lagrange-Form** des Restglieds. Sie ist die einfachste Formel für die Abschätzung der Genauigkeit der Taylor-Approximation.
- Die Formel  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  ist die **Schlömilch-Form** des Restglieds. Sie ist die genaueste Formel für die Abschätzung der Genauigkeit der Taylor-Approximation.

### Bemerkungen:

- Interessant ist oft vor allem die Form des Restgliedes  $R_n(x)$ .
- $|R_n(x)|$  gibt den Fehler bei der Approximation  $T_n(x) \approx f(x)$  an. Wünschenswert ist obere Schranke, unabhängig von  $\xi$ .
- Häufig verwendet man die **Lagrange-Form** von  $R_n(x)$  ( $p = n + 1$ ) für die Abschätzung:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n}, \quad (0 < \theta < 1).$$

- Der Spezialfall der Taylor-Formel für  $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad \text{mit } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

heißt **McLaurin-Formel**.

# Beispiel

## McLaurin-Formel für $\sin(x)$

**Beispiel:** Sei  $y = f(x) = \sin x$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Für gerade  $k = 2\nu$  bzw. ungerade  $k = 2\nu + 1$  gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

$$T_{2\nu+2}(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

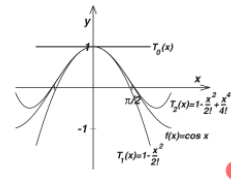
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + R_{2\nu+2}(x)$$

mit

$$R_{2\nu+2}(x) = (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu+3}}{(2\nu+3)!} \sin(\theta x).$$



# McLaurin-Formel für $\sin(x)$

**Beispiel:** Sei  $y = f(x) = \sin x$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

Für gerade  $k = 2\nu$  bzw. ungerade  $k = 2\nu + 1$  gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

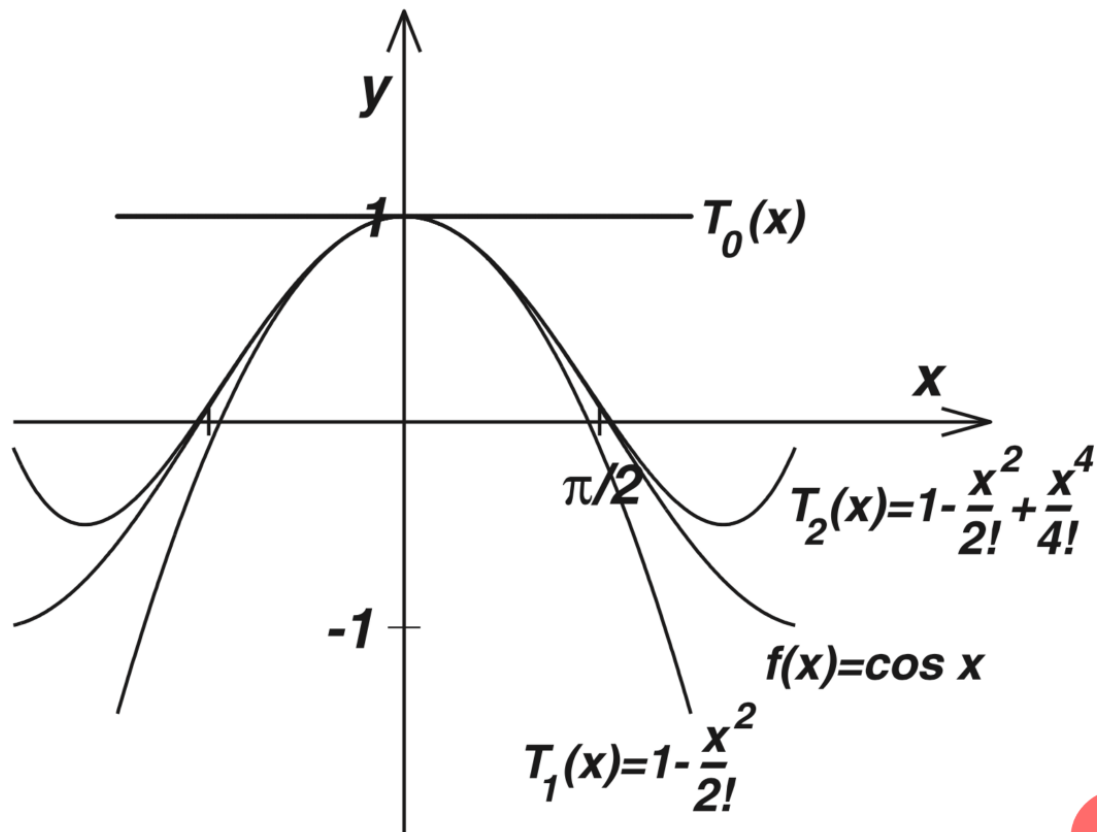
$$T_{2n+2}(x) = \sum_{\nu=0:n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0:n} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + R_{2n+2}(x)$$

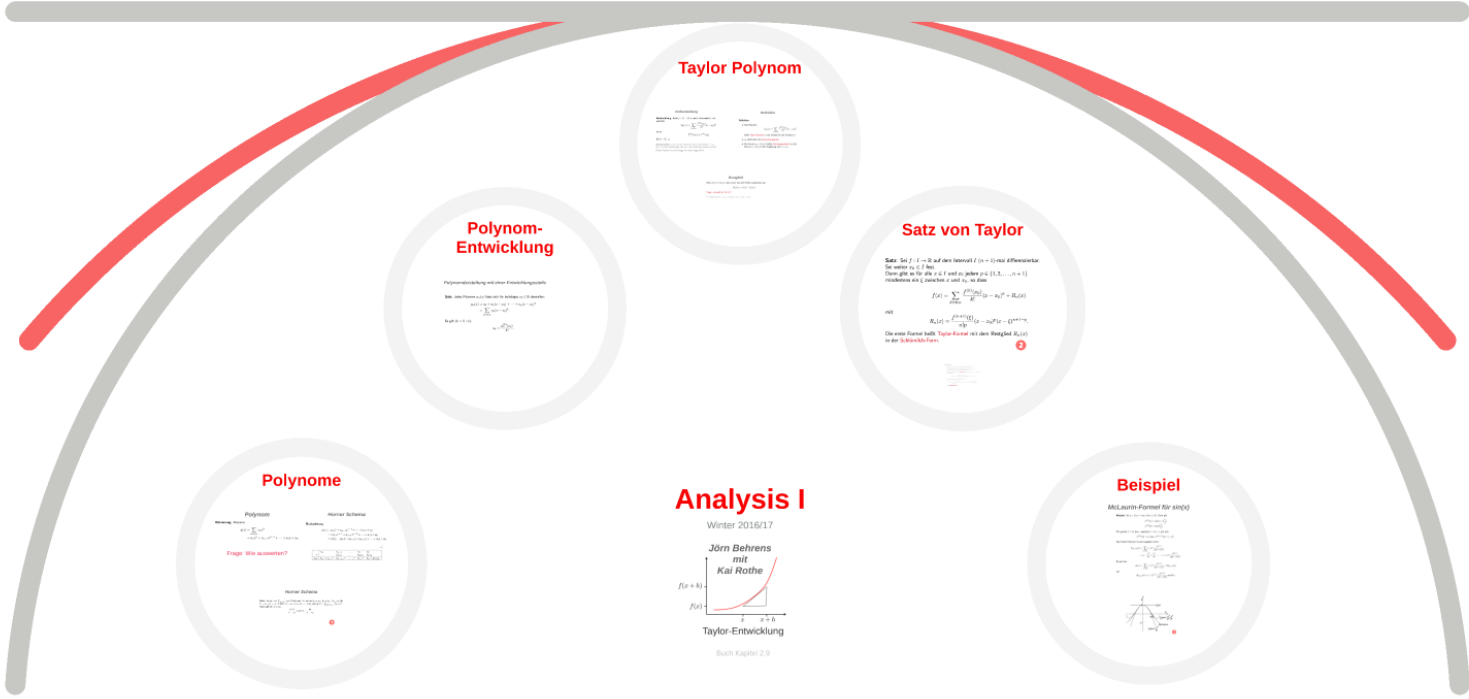
mit

$$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin(\theta x).$$



3





**Taylor Polynom**

**Definition**  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ .  
 Dann heißt  $T_n f(x)$  das **n-te Taylor Polynom** von  $f$  an der Stelle  $a$ .  
 Es ist ein Polynom  $T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .

**Polynom-Entwicklung**

Polynomentwicklung mit einem Entwicklungspunkt  
 Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ .  
 Dann gilt  $f(x) = T_n f(x) + R_n(x)$ ,  
 wobei  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$  für ein  $\xi$  zwischen  $a$  und  $x$ .

**Satz von Taylor**

**Satz:** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I = ]a-r, a+r[$   $n$ -mal ableitbar.  
 Sei  $x_0 \in I$  fest.  
 Dann gilt für alle  $x \in I$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit  
 $|R_n(x)| < \epsilon$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ .  
 Die erste Formel heißt **Taylor Formel** mit dem Restglied  $R_n(x)$  in der **Lagrange-Form**.

**Polynome**

**Polynom**  
 Ein Polynom ist ein Ausdruck der Form  
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   
 mit  $a_n \neq 0$ .  
**Frage: Wie approximiert?**  
 Man approximiert  $f(x)$  durch  $P(x)$  an der Stelle  $a$ .

**Analysis I**

Winter 2016/17  
**Jörn Behrens mit Kai Rathe**  
  
 Taylor-Entwicklung  
 Buch Kapitel 2.9

**Beispiel**

**Maclaurin-Formel für  $\sin(x)$**   
 Sei  $f(x) = \sin(x)$ .  
 Dann gilt  $T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .  
 Die Maclaurin-Formel für  $\sin(x)$  lautet  
 $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$   
 Die Restglieder  $R_n(x)$  sind durch  
 $R_n(x) = \frac{\sin(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$  gegeben, wobei  $\xi$  zwischen  $0$  und  $x$  liegt.