Aufgabe 1: (3 Punkte)

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^k = \frac{5^{n+1}}{4} - \frac{1}{4}$.

Lösung:

Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} 5^k &= 5^0 = 1 = \frac{5^1}{4} - \frac{1}{4} \\
n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} 5^k &= \sum_{k=0}^{n} 5^k + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}}{4} - \frac{1}{4} + 5^{n+1} \\
&= 5^{n+1}\left(\frac{1}{4} + 1\right) - \frac{1}{4} = 5^{n+1} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5^{n+2}}{4} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Man berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2^n - 3^n}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$.

Lösung:

a) (2 Punkte)
Aus der Konvergenz geometrischer Folgen $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|q| < 1$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2^n - 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{2 \cdot 3}{(2/3)^n - 1} = \frac{2 \cdot 3}{-1} = -6.$$

b) (2 Punkte)
Aus der Regel von de l'Hospital für den Fall "$\frac{0}{0}$" erhält man

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 - 2x - 8} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{6x - 6}{6x - 2} = \frac{12 - 6}{12 - 2} = \frac{3}{5}.$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\,, & x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \ln(x+c)\,, & \dfrac{\pi}{2} < x\,. \end{cases}$

Man bestimme $c \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ stetig wird. Ist f in x_0 auch differenzierbar (Begründung)?

b) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{(i) } f(x) = x^4 \cos(x), \quad \text{(ii) } g(x) = \frac{2x}{x^3+2}, \quad \text{(iii) } h(x) = \sqrt{e^x - \frac{1}{x}}.$$

Lösung:

a) (2 Punkte)

Stetigkeit im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\ln(\pi/2+c) = \lim_{x\to\pi/2+} \ln(x+c) = \lim_{x\to\pi/2+} f(x) \stackrel{!}{=} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c = e - \frac{\pi}{2}.$$

f ist im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ nicht differenzierbar, denn

$$\frac{1}{e} = \lim_{x\to\pi/2+} \frac{1}{x+e-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\pi/2+} f'(x) \neq \lim_{x\to\pi/2-} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2-} \cos(x) = 0.$$

b) (3 Punkte)

(i) $f'(x) = (x^4\cos(x))' = 4x^3\cos(x) - x^4\sin(x)$

(ii) $g(x) = \left(\dfrac{2x}{x^3+2}\right)' = \dfrac{2(x^3+2) - 2x\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} = \dfrac{4-4x^3}{(x^3+2)^2}$

(iii) $h'(x) = \left(\sqrt{e^x - \dfrac{1}{x}}\right)' = \dfrac{e^x + \dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{e^x - \dfrac{1}{x}}}$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Für die durch

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

gegebene Funktion f bestimme man den maximalen Definitionsbereich D, prüfe, ob f symmetrisch ist, gebe das Monotonieverhalten von f in D an und klassifiziere alle Extremwerte.

Lösung:

Definitionsbereich: $16 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D = [-4, 4]$

Symmetrie: f ist gerade, denn $f(-x) = \sqrt{16 - (-x)^2} = \sqrt{16 - x^2} = f(x)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad -4 < x < 0 \;\Rightarrow\; f \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0 & \text{für} \quad x_1 = 0 \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < x < 4 \;\Rightarrow\; f \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

Damit sind $x_0 = -4$ und $x_2 = 4$ strenge lokale Minima und $x_1 = 0$ ist strenges lokales Maximum. Minima und Maximum sind sogar globale Extremwerte.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + x,$$

sowie einen Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) Schreiben Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ bis zum Grad 3 auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_3(x)$ in der Form nach Lagrange.

c) Wie verhält sich das Taylorpolynom, wenn Sie es bis zum Grad 4 entwickeln und welche Form hat dann das Restglied?

Lösung:

a) (1 Punkt)

Zunächst berechne ich die Ableitungen von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 + 3x^2 - 2x + 1 && \Rightarrow && f'(0) = 1 \\ f''(x) &= 24x^2 + 6x - 2 && \Rightarrow && f''(0) = -2 \\ f'''(x) &= 48x + 6 && \Rightarrow && f'''(0) = 6 \\ f^{(4)}(x) &= 48 && \Rightarrow && f^{(4)}(0) = 48 \end{aligned}$$

Außerdem ist $f(0) = 0$. Damit ergibt sich

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 0 + 1x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = x^3 - x^2 + x.$$

b) (1 Punkt)

Das Restglied nach Lagrange kann allgemein geschrieben werden:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$R_3(x)$ berechnet sich also zu

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 = \frac{48}{4!}x^4 = 2x^4$$

c) (2 Punkte)

Das Taylorpolynom $T_4(x)$ berechnet sich zu

$$T_4(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 + \frac{48}{4!}x^4 = 2x^4 + x^3 - x^2 + x = f(x)$$

Für das Restglied benötigen wir $f^{(5)}(x)$. Nun ist aber $f^{(5)}(x) \equiv 0$, daher gilt

$$R_4(x) = 0.$$