Aufgabe 1: (4 Punkte)

Man berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+4}-\dfrac{2n^2}{2n+1}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+4}-\frac{2n^2}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(2n+1)-2n^2(n^2+4)}{(n^2+4)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-8n^2}{2n^3+n^2+8n+4}=\frac{1}{2}.$$

b) (2 Punkte)
Aus der Regel von de l'Hospital für den Fall "$\frac{0}{0}$" erhält man

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{1}{6}.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

a) (i) Man bestimme eine in $x = 0$ stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(1) = 0$ und $f'(x) = \begin{cases} \cos(x)\,, & x < 0 \\ -1\,, & 0 < x\,. \end{cases}$

(ii) Ist f in $x = 0$ dann auch differenzierbar (Begründung)?

b) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{(i) } g(x) = \frac{1-3x}{x^2+x}, \quad \text{(ii) } h(x) = \ln\left(\sin(x) - \frac{3}{x}\right).$$

Lösung:

a) (3 Punkte)

(i) Man erhält $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin(x) + a\,, & x < 0 \\ -x + b\,, & 0 < x \end{array} \right\}$ und $0 = f(1) = -1 + b$ ergibt $b = 1$.

Stetigkeit in $x = 0$: $a = \lim\limits_{x\to 0-} (\sin(x) + a) \overset{!}{=} \lim\limits_{x\to 0+} (-x + 1) = 1 \Rightarrow a = 1$

(ii) f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$1 = \lim_{x\to 0-} \cos(x) = \lim_{x\to 0-} f'(x) \neq \lim_{x\to 0+} f'(x) = -1.$$

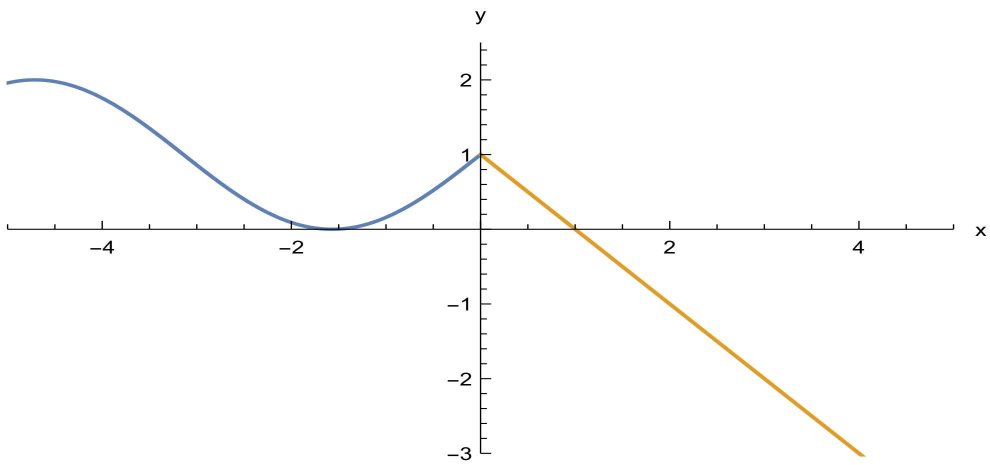


Bild 2 a): $f(x)$ mit $a = 1 = b$ (keine Wertung)

b) (2 Punkte)

(i) $$g'(x) = \left(\frac{1-3x}{x^2+x}\right)' = \frac{-3(x^2+x) - (1-3x)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{3x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$$

(ii) $$h'(x) = \left(\ln\left(\sin(x) - \frac{3}{x}\right)\right)' = \frac{\cos(x) + \dfrac{3}{x^2}}{\sin(x) - \dfrac{3}{x}}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Gegeben sei die durch $f(x) = \sqrt{x+1}$ definierte Funktion.

Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und schätze den Fehler zwischen $f(1)$ und $T_2(1; x_0)$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad T_2(x; 0) = \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + f(0) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + 1$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8(x+1)^{5/2}} \qquad \text{mit } 0 < \xi < 1 \text{ gilt}$$

$$|f(1) - T_2(1; 0)| = |R_2(1; 0)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(1-0)^3 \right| = \left| \frac{1}{16(\xi+1)^{5/2}} \right| \leq \frac{1}{16}$$

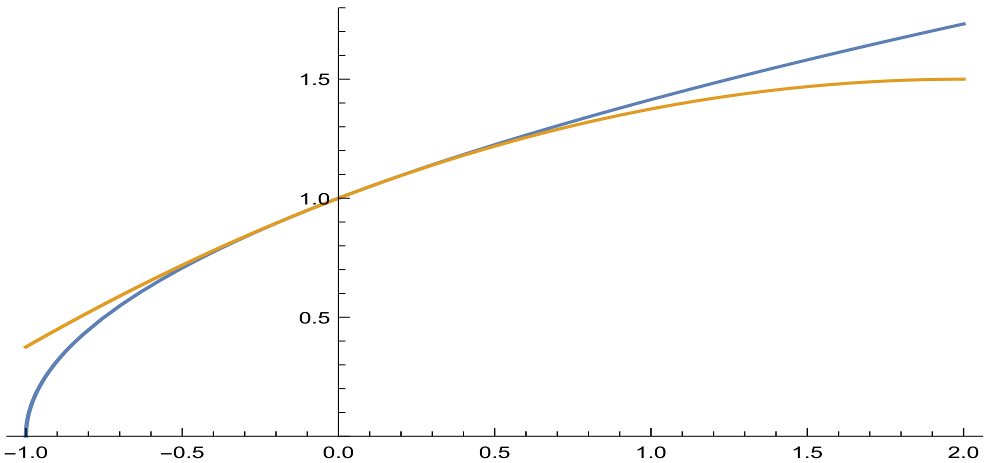


Bild 3: $f(x) = \sqrt{x+1}$ und $T_2(x; 0)$ (keine Wertung)

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Man bestimme für die durch

$$f(x) = e^x(x-4)$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alle Wendepunkte und die Bereiche, in denen f konvex bzw. konkav ist.

Lösung:

$f(x) = e^x(x-4), \quad f'(x) = e^x(x-3), \quad f''(x) = e^x(x-2)$

$$f''(x) = e^x(x-2) \begin{cases} < \; 0 & , \; x < 2 \quad \text{streng konkav} \\ = \; 0 & , \; x_1 = 2 \quad \text{Wendepunkt} \\ > \; 0 & , \; 2 < x \quad \text{streng konvex} \end{cases}$$

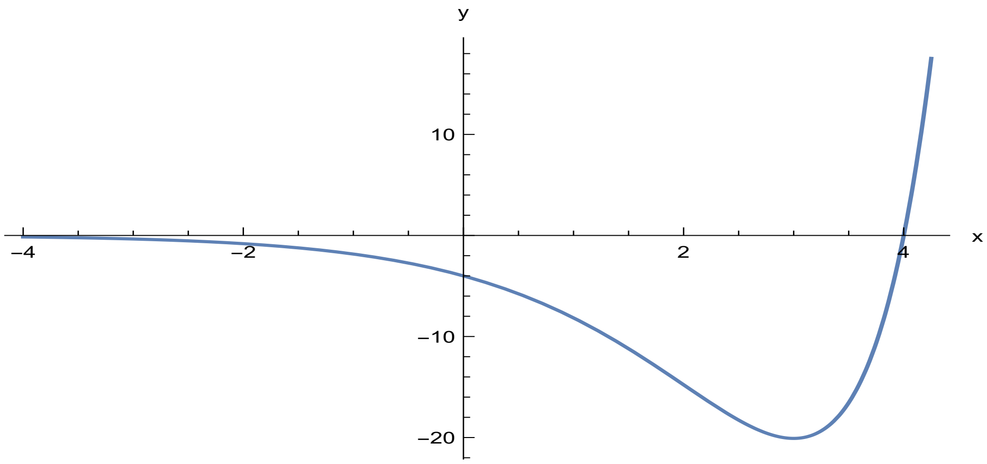


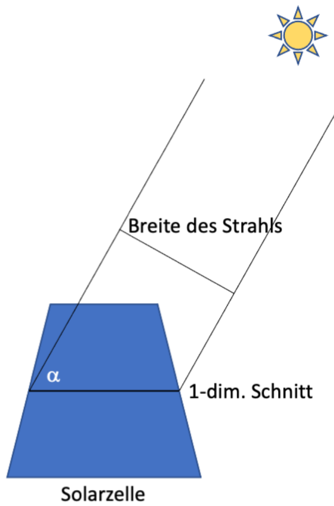
Bild 4: $f(x) = e^x(x-4)$ (keine Wertung)

Aufgabe 5: (4 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Leistung einer Solarzelle unter vereinfachten Annahmen beschrieben werden.

Wir nehmen folgendes Modell einer Solaranlage an:
Die Zelle sei 1 Längeneinheit (z.B. [m]) breit und sie generiere maximal eine Leistungseinheit (z.B. [KW]) bei optimaler Sonneneinstrahlung. Die Leistung sei direkt proportional zur Breite des einfallenden Sonnenstrahlbündels und wir stellen die Zelle durch einen ein-dimensionalen Schnitt dar (siehe Skizze).

Vereinfachend nehmen wir weiter an, dass die Sonne von 6:00 Uhr morgens bis 18:00 Uhr abends scheint und in einem Kreisbogen um die Zelle rotiert. Wenn die Zelle optimal ausgerichtet ist, dann steht die Sonne um 12:00 Uhr senkrecht zur Zelle und dementsprechend erzeugt die Zelle dann 100% ihrer Leistung.



Es ergibt sich für den Winkel $\alpha = \alpha(t)$ in Abhängigkeit von der Tageszeit:

$$\alpha(t) = \frac{t-6}{12}\pi. \tag{1}$$

Für die Breite $B = B(\alpha)$ des einfallenden Sonnenstrahlbündels berechnet man unter Berücksichtigung der Breite der Solarzelle von 1:

$$B(\alpha) = \sin(\alpha). \tag{2}$$

Wenn wir nun also annehmen, dass die maximale Leistung 1 Leistungseinheit beträgt und direkt proportional zur Breite des Strahlenbündels ist, dann können wir die Leistung $L = L(t)$ der Solarzelle in Abhängigkeit der Tageszeit darstellen als

$$L(t) = \sin\left(\frac{t-6}{12}\pi\right). \tag{3}$$

Aufgaben: Beschreiben Sie zunächst jeweils, was zu tun ist, und rechnen Sie danach.

a) Wie muss die Gleichung (3) verändert werden, wenn die Zelle nicht optimal ausgerichtet ist, sondern um $3°$ zur aufgehenden Sonne geneigt ist? Schreiben Sie die modifizierte Gleichung auf.

b) Um welche Uhrzeit erreicht die geneigte Zelle ihre maximale Leistung?

Lösung:

a) (**2 Punkte**)

Wir müssen zunächst den Winkel in Bogenmaß ausdrücken und dann zum Winkel α addieren:

$$\beta = \frac{3°}{180°}\pi = \frac{1}{60}\pi.$$

Damit ergibt sich für die modifizierte Leistungskurve $\tilde{L}(t)$:

$$\tilde{L}(t) = \sin\left(\alpha(t) + \frac{1}{60}\pi\right) = \sin\left(\frac{5(t-6)+1}{60}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{29\pi}{60}\right)$$

b) (**2 Punkte**)

Für die Berechnung der maximalen Leistung muss das Maximum von $\tilde{L}(t)$ bestimmt werden. Das gelingt, indem man die Ableitung bildet.

Die Ableitung ergibt sich zu

$$\tilde{L}'(t) = \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{29\pi}{60}\right) = \frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{60}\right)$$

Entsprechend berechnet man leicht, dass für $\frac{\pi}{60}(5t+1) = \{0, \pi\}$ die Ableitung verschwindet. Die rechte Seite Null wird für $t = -\frac{1}{5}$ angenommen, zu diesem Zeitpunkt scheint die Sonne aber gar nicht. Also gilt $t = \frac{59}{5}$ oder 11:48 Uhr.