Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Für die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 16$ zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 8 + i - (7i - 9)$,

(ii) $z_2 = 4i^9 + 8i^6 - 7i^3 + 3i^2 - 9i$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$,

(iv) $z_4 = (8 + i)(7i - 9)$,

(v) $z_5 = \dfrac{8 + i}{7i - 9}$.

c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}\,, \quad z_2 = \sqrt{3} - i\,, \quad z_3 = \frac{2e^{7\pi i/6}e^{\pi i/3}}{e^{\pi i/2}}\,.$$

(i) Man berechne $z_1 + \bar{z}_2$, Re $(z_1 + z_2)$, Im $(\bar{z}_1 + z_2)$, $|z_1 + z_3|$.

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1\,, \quad z_2\,, \quad z_3\,, \quad z_1^7\,, \quad \bar{z}_2^8\,, \quad \frac{z_1^7\bar{z}_2^8}{z_3^{14}}\,.$$

Aufgabe 10:

a) Für die Funktion

$$f : [a, \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 - 6x + 11$$

bestimme man die kleinste Zahl a, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

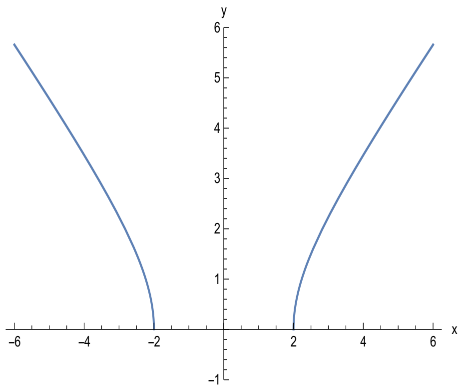
(i) $f_1 : [-4,4] \to [0,5]\,, \quad f_1(x) = |3-2|x||,$

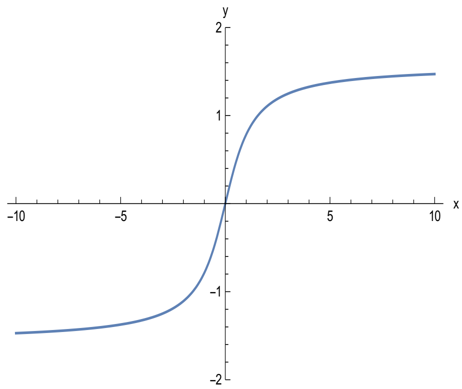
(ii) $f_2 : [1,\infty[\, \to [0,\infty[\,, \quad f_2(x) = \ln x,$

(iii) $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \to [-1,1]\,, \quad f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$

(iv) $f_4 :]-1,1[\, \to [-1,1]\,, \quad f_4(x) = x^3.$

Aufgabe 11:
Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:





$f(x) = ?$ $\qquad g(x) = ?.$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \arctan(x)\,, \quad f_2(x) = \sqrt{|x|-2}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2-4}\,, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

Aufgabe 12:

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}} + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1)\,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x + 35}{x^2 - 8x + 19} \; .$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 1 + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x \; , \\ \sin 4x &= 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x \; . \end{aligned}$$

Fragen zur Vorlesung:

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion. Gerne können Sie dafür ein Computerprogramm Ihrer Wahl verwenden. Aber auch Hand-Skizzen sind natürlich erlaubt.

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der Funktion f. Ist die Funktion gerade oder ungerade?

c) Betrachten Sie die Menge $I := D \cap \mathbb{R}_0^+$, wobei $\mathbb{R}_0^+ = \{x : x \in \mathbb{R} \;, x \geq 0\}$. Ist die Menge I offen, oder abgeschlossen? Ist $a = 0$ ein Häufungspunkt der Menge I?

d) Ganz offensichtlich ist die Funktion f an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. In direkter Umgebung dieser Stelle ist f jedoch durchaus auswertbar. Bestimmen Sie die Art der Unstetigkeit der Funktion f an $x = 0$.

Abgabetermin: 30.11. - 4.12.20 (zu Beginn der Übung)