Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Häufungspunkte und Grenzwerte von Funktionen

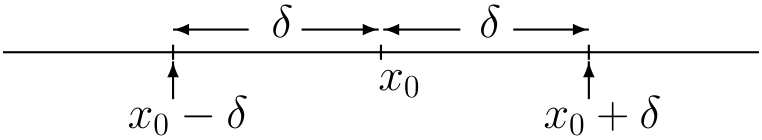
Definition:

Gegeben sei eine Teilmenge D der reellen Zahlen, also $D \subset \mathbb{R}$.

a) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ heißt

$$U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

δ-Umgebung von x_0.



b) $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt** von D, falls es eine δ-Umgebung von x_0 gibt, für die $U_\delta(x_0) \subset D$ gilt.

c) D heißt **offen**, falls D nur aus inneren Punkten besteht, d.h. für alle $x \in D$ gibt es eine δ-Umgebung von x mit $U_\delta(x) \subset D$.

d) $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge D, falls es für jede δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 mindestens einen Punkt $\tilde{x} \neq x_0$ mit $\tilde{x} \in U_\delta(x_0) \cap D$ gibt.

e) Man bezeichne mit D^0 die **Menge der inneren Punkte** und mit D' die **Menge der Häufungspunkte** von D.

f) x_0 heißt **Randpunkt** von D, falls $x_0 \in (D \cup D') \setminus D^0$ gilt.

g) D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$ gilt.

Definition:

Gegeben seien eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Häufungspunkt x_0 von D.

a) Für f existiert der Grenzwert in x_0,
wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert,
so dass für alle $x \in D$ mit $x \neq x_0$ und $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \,.$$

Man sagt dann,
dass $f(x)$ gegen den **Grenzwert** y_0 **konvergiert**,
wenn x gegen x_0 strebt und schreibt dafür auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oder} \quad f(x) \to y_0 \ \text{für} \ x \to x_0.$$

b) Verlangt man in der obigen Definition
$x < x_0$ bzw. $x_0 < x$ statt $x \neq x_0$, so heißt
y_0 **linksseitiger** bzw. **rechtsseitiger Grenzwert**
der Funktion f in x_0 und man schreibt

$$y_0 = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{bzw.}$$
$$y_0 = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

c) Man spricht von **uneigentlicher Konvergenz**, wenn auch

$x_0 = +\infty$ bzw. $x_0 = -\infty$ und/oder

$y_0 = +\infty$ bzw. $y_0 = -\infty$ zugelassen sind.

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Satz:
Für die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
und einen Häufungspunkt x_0 von D
existieren für $x \to x_0$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Dann gelten die folgenden Rechenregeln

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

c) $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

d) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

e) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ gilt,

f) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Im Definitionsbereich D von f und g lassen sich die Rechenregeln auch übertragen auf

$$x \to x_0+\,, \quad x \to x_0-\,, \quad x \to \infty \quad \text{und} \quad x \to -\infty\,.$$

Rechnen mit ∞ bei den Funktionsgrenzwerten:

a) zulässig ist:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad -\infty \cdot \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

b) nicht erklärt ist:

$$\infty \cdot 0\,, \quad -\infty \cdot 0\,, \quad \infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{-\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

Aufgabe 13:

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

(i) $M_1 = (]-3,5] \cap]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$$]-3,5] \cap]2,8] =]2,5]$$

$$\Rightarrow \quad M_1 =]2,5] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad M_1' = \{0\} \cup [2,5] \quad \text{und} \quad M_1^0 =]2,5[\,,$$

M_1 ist weder offen noch abgeschlossen

(ii) $M_2 = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$$M_2 = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad M_2' = \{1\} \cup [3,4] \quad \text{und} \quad M_2^0 =]3,4[\,,$$

M_2 ist weder offen noch abgeschlossen

(iii) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < y < |x| < 1 \right\}$

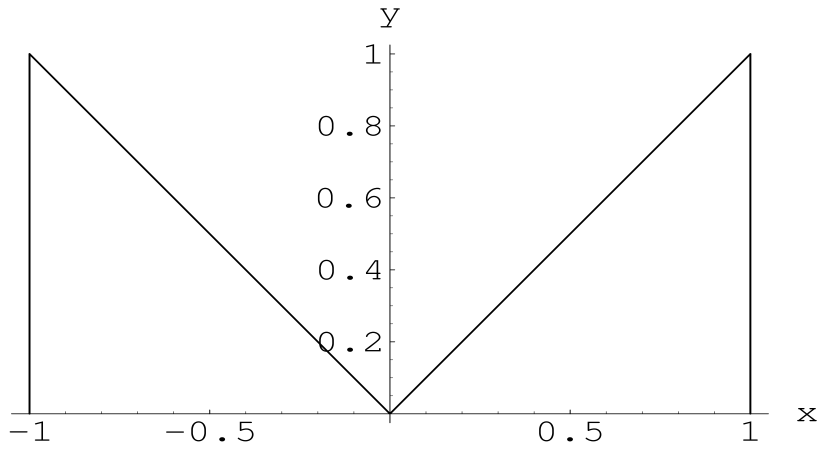


Bild 13 a) Menge M_3

$$M_3' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le |x| \le 1 \right\} ,$$

$$M_3^0 = M_3 ,$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x \tan x$,

$$\lim_{x\to\pi/2} \cos x \tan x = \lim_{x\to\pi/2} \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \sin x = 1$$

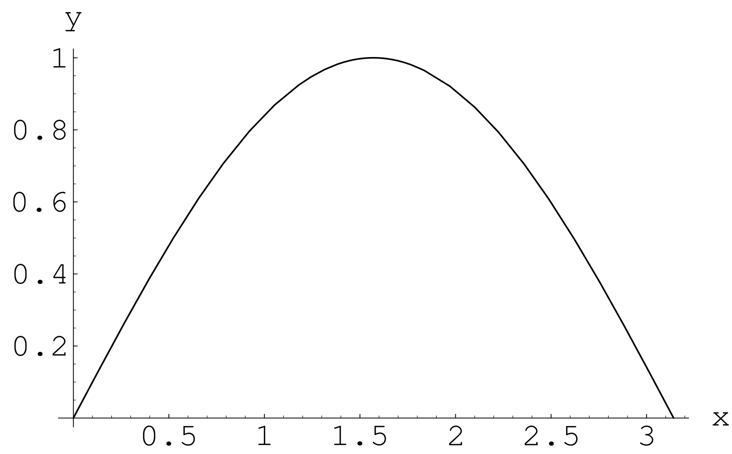


Bild 13 b) (i) $f(x) = \cos x \tan x = \sin x$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,,$

Der folgende Grenzwert existiert nur uneigentlich:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

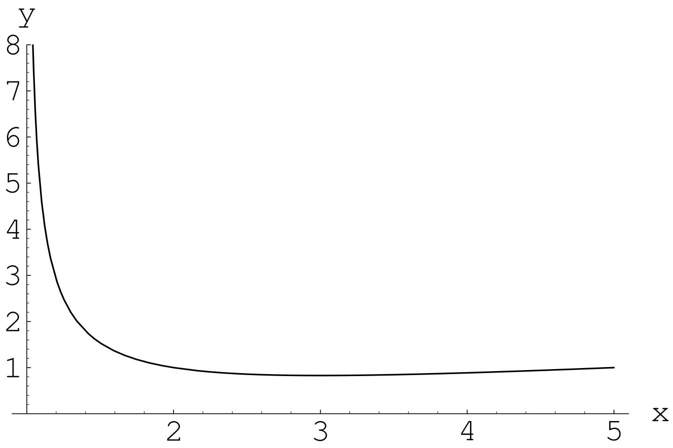


Bild 13 b) (ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

(iii) $\lim_{x\to\infty}(2-\cosh x+\sinh x)$

Variante 1:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(2-\cosh x+\sinh x)\\
=\;&\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)\\
=\;&\lim_{x\to\infty}(2-e^{-x})=2
\end{aligned}$$

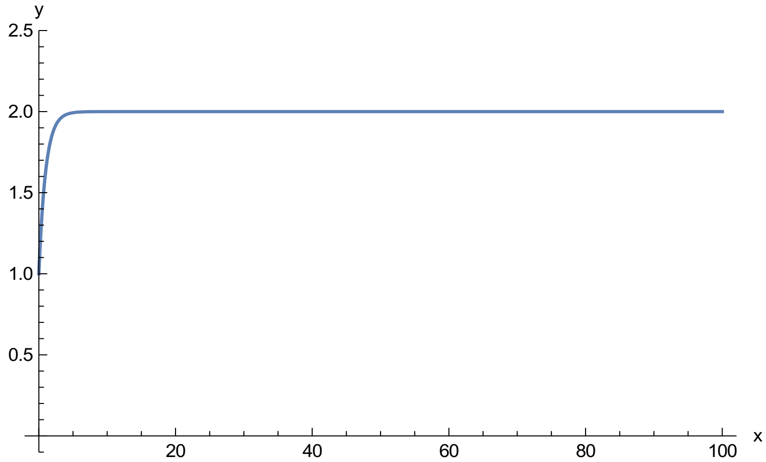


Bild 13 b) (iii) $f(x)=2-\cosh x+\sinh x$

Variante 2:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(2-\cosh x+\sinh x)\\
=\;&\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{(\cosh x-\sinh x)(\cosh x+\sinh x)}{\cosh x+\sinh x}\right)\\
=\;&\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh x+\sinh x}\right)\\
=\;&\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{\cosh x+\sinh x}\right)=2
\end{aligned}$$

Zahlenfolgen

Definition:

Unter einer reellen **Zahlenfolge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Abbildung (Funktion) der Form

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \,. \end{array}$$

Berechnung von Folgen:

a) direkte Berechnung über den Index n, z.B.: $\quad a_n := \dfrac{n}{n^2+1}$,

b) **rekursive** Berechnung, z.B.: $\quad a_{n+1} := \dfrac{a_n}{3}$, mit $a_1 := 1$

Definition:

Eine reelle Zahlenfolge heißt **Nullfolge**,

falls für alle (insbesondere beliebig kleine) $\varepsilon > 0$

ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

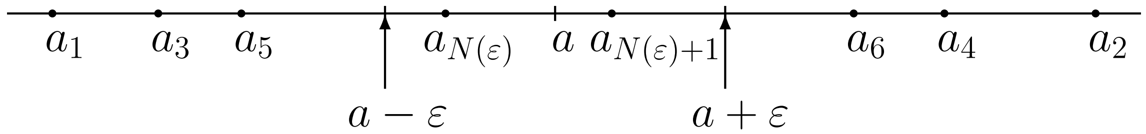
$$|a_n| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)\,.$$

Die Folge **konvergiert** oder strebt dann

gegen den **Grenzwert** Null und man schreibt dafür auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{oder} \quad a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

ε**-Umgebung** um a: $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$



ε-Umgebung von a: $U_\varepsilon(a)$

Definition:

Eine reelle Zahlenfolge **konvergiert**

gegen den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$,

wenn $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist,

d.h. falls für alle (insbesondere beliebig kleine) $\varepsilon > 0$

ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)\,.$$

Man schreibt dafür auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

divergente Folge: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht

uneigentlich konvergente Folge:

(spezielle Form der Divergenz)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Rechenregeln für Grenzwerte von Zahlenfolgen

Satz:

Für konvergente Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a,$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b},$ falls $b \neq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad b_n \neq 0$ gilt,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,$ für eine Konstante $k \in \mathbb{N}$,

Rechnen mit ∞:

a) zulässig ist:

$$\infty\cdot\infty = \infty\,, \quad -\infty\cdot\infty = -\infty\,, \quad \infty+\infty = \infty\,, \quad \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

b) nicht erklärt ist:

$$\infty \cdot 0\,, \quad -\infty \cdot 0\,, \quad \infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{-\infty}{\infty}$$

Elementare Zahlenfolgen mit Grenzwerten

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty & ; \; k \in \mathbb{Z}^+ \\ 1 & ; \; k = 0 \\ 0 & ; \; k \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

b) **geometrische Folge** mit $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & ; \; q > 1 \\ 1 & ; \; q = 1 \\ 0 & ; \; -1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1 \\ \text{divergent} & ; \; q \leq -1 \end{cases}$$

c) **Exponentialfunktionsfolge**:
mit $x \in \mathbb{R}$ und $e = 2.71828182845904...$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \,,$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für eine Konstante $c > 0$.

Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen

beschränkte Folge:

Es gibt reelle Konstanten A, B, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A \leq a_n \leq B$.

A wird als **untere** und B als **obere Schranke** der Folge bezeichnet.

nach oben bzw. **unten beschränkte Folge**:

Gilt nur $a_n \leq B$ bzw. $A \leq a_n$,

so heißt die Folge **nach oben** bzw. **nach unten beschränkt**.

monotone Folge: es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} & (\textbf{monoton wachsend}) \\ a_n \geq a_{n+1} & (\textbf{monoton fallend}) \end{cases}$$

Satz: **(Monotoniekriterium)**

Jede **monoton wachsende** und **nach oben beschränkte** reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert ist dann das **Supremum** der Folge, d.h. die kleinste obere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Entsprechend konvergiert jede **monoton fallende** und **nach unten beschränkte** reelle Zahlenfolge gegen das **Infimum** der Folge, d.h. gegen die größte untere Schranke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Aufgabe 14:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3+1/n^2}{2-1/n-7/n^2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1-2/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1-2/n}} = \frac{4}{2} = 2$$

c) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{4n^2+3}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n} - \frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2/n^2} - \sqrt{4+3/n^2} = -1$$

d) $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{2(2/3)^n+1}{3+(2/3)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2/3)^n+1}{3+(2/3)^n}$$

$$= \frac{2\cdot 0+1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

e) $e_1 = 0\,, \quad e_{n+1} = 1 - \dfrac{e_n}{3}\,,$

Die ersten Folgenglieder lauten

$$e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_3 = \frac{2}{3} = 0.666...,$$

$$e_4 = \frac{7}{9} = 0.777...,\ e_5 = \frac{20}{27} = 0.740...,\ e_6 = \frac{61}{81} = 0.753...$$

Falls $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $e := \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ der Grenzwert. Aus der Rekursion erhält man:

$$e = \lim_{n\to\infty} e_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{e_n}{3}\right) = 1 - \frac{e}{3} \;\Rightarrow\; e = \frac{3}{4}\,.$$

Zum Nachweis der Konvergenz von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
zeige $e_n - e = e_n - \dfrac{3}{4}$ ist eine Nullfolge

$$\begin{aligned}
\left|e_{n+1} - \frac{3}{4}\right| &= \left|1 - \frac{e_n}{3} - \frac{3}{4}\right| = \left|-\frac{e_n}{3} + \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(e_n - \frac{3}{4}\right)\right| \\
&= \frac{1}{3}\left|e_n - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left|e_{n-1} - \frac{3}{4}\right| = \cdots \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left|e_1 - \frac{3}{4}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{4} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.
\end{aligned}$$

f) $f_1 = 3\,, \quad f_{n+1} = \dfrac{f_n^2 + 8}{6}\,,$

Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, so gilt $f = \dfrac{f^2+8}{6}$.
Man erhält

$$0 = f^2 - 6f + 8 = (f-2)(f-4) \quad \Leftrightarrow \quad f = 2 \vee f = 4.$$

Die ersten Folgenglieder lauten:

$$f_1 = 3\,, \quad f_2 = \frac{17}{6} = 2.83...\,,$$

$$f_3 = \frac{577}{216} = 2.67...\,, \quad f_4 = \frac{706177}{279936} = 2.52...$$

Durch vollständige Induktion zeigt man $f_n \geq 2$:

$n = 1: \qquad f_1 = 3 \geq 2$

$n \to n+1: \qquad f_{n+1} = \dfrac{f_n^2+8}{6} \geq \dfrac{2^2+8}{6} = 2$

Weiter zeigt man durch vollständige Induktion $f_{n+1} \leq f_n$,

$n = 1 :$ $\qquad f_2 = \dfrac{17}{6} \leq f_1 = 3$

$n \to n+1 :$

$0 \leq f_{n+1} \leq f_n \;\Rightarrow\; f_{n+1}^2 \leq f_n^2$

$$\Rightarrow \quad f_{n+2} = \frac{f_{n+1}^2 + 8}{6} \leq \frac{f_n^2 + 8}{6} = f_{n+1}.$$

Also fällt f_n monoton, ist nach unten beschränkt
und damit dann konvergent gegen $f = 2$.

g) $g_1 = 1, \quad g_{n+1} = 2g_n + 1$,

Wenn $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen g konvergiert, so ergibt die Rekursion

$$g = 2g + 1 \quad \Rightarrow \quad g = -1\,.$$

Aus $g_1 = 1$ und $g_{n+1} = 2g_n + 1$ folgt Induktion $g_n \geq 0$.

Damit kann g_n nicht konvergieren.

Stetige Funktionen

Definition:

Gegeben seien eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Häufungspunkt $x_0 \in D$.

a) f heißt **linksseitig stetig** in x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

b) f heißt **rechtsseitig stetig** in x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

c) f heißt **stetig in** x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

d) Ist D eine offene Menge, dann heißt f **stetig auf** D, wenn f für alle $x \in D$ stetig ist.

Bemerkungen:

a) f ist in $x_0 \in D$ genau dann stetig,
wenn für alle Folgen $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset D$ mit
$x_n \to x_0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)\ ,$$

d.h. die Grenzwertbildung $\lim\limits_{n\to\infty}$ und f können vertauscht werden.

b) Die elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig:
Polynome, gebrochen rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen mit den zugehörigen Umkehrfunktionen.

c) Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten elementarer Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Zwischenwertsatz:

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

mit $f(a) < c < f(b)$ oder $f(a) > c > f(b)$

gibt es (mindestens) ein $x_0 \in\,]a, b[$ mit $f(x_0) = c$.

Spezialfall:

$c = 0 \;\Rightarrow\; f(a) \cdot f(b) < 0 \;\Rightarrow\; f(x_0) = 0$,

d.h. f besitzt eine Nullstelle in $]a, b[$.

Aufgabe 15:

a) Für die Funktionen mit den folgenden Abbildungsvorschriften zeichne man die Funktionsgraphen und

berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und

überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich eine Unstetigkeit in x_0 beheben lässt.

(i)

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f_1(x) = \lim_{x \nearrow 0} (x^2+1) = 0^2 + 1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$

$$\lim_{x \searrow 0} f_1(x) = \lim_{x \searrow 0} (x^2+1) = 0^2 + 1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$

f_1 ist unstetig in $x_0 = 0$.
Die Unstetigkeit in $x_0 = 0$ lässt sich durch Wahl von $f_1(0) = 1$ beheben.

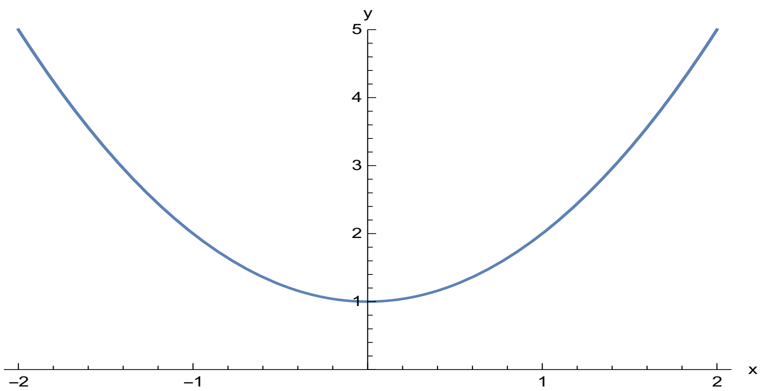


Bild 15 a) (i) $f_1(x)$

(ii)

$$f_2(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \leq 1 = x_0 \\ e^x & , \quad 1 < x \end{cases} ,$$

$$\lim_{x \nearrow 1} f_2(x) = \lim_{x \nearrow 1} 3 = 3 = f_2(1)$$

$$\lim_{x \searrow 1} f_2(x) = \lim_{x \searrow 1} e^x = e^1 = e \neq f_2(1) = 3$$

f_2 besitzt in $x_0 = 1$ eine Sprungstelle,
ist dort also unstetig.

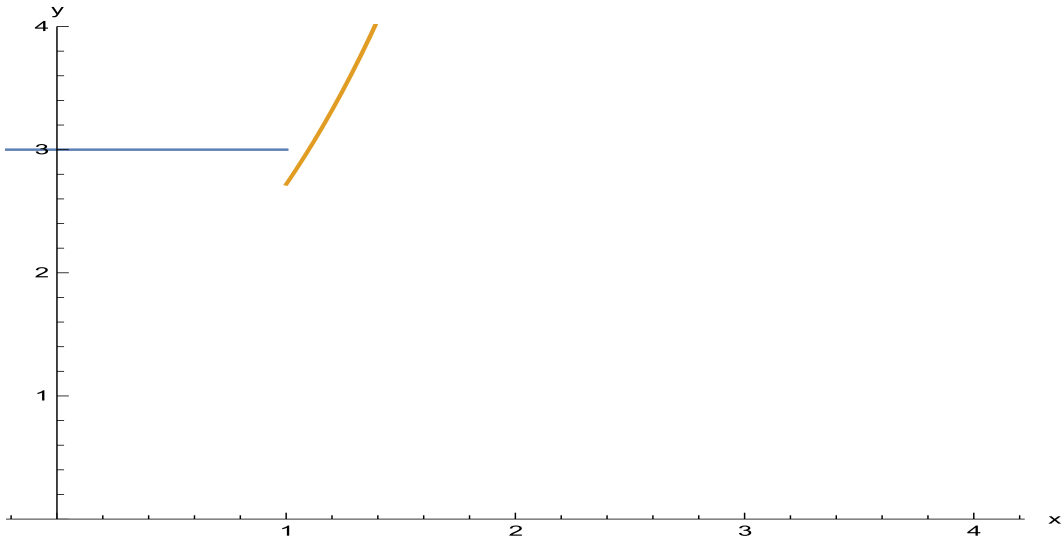


Bild 15 a) (ii) $f_2(x)$

(iii)

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}\ , \ \ x_0 = 5$$

f_3 besitzt in $x_0 = 5$ eine Definitionslücke.

Durch Linearfaktorzerlegung des Zählers erhält man

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{(x+3)(x-5)}{x - 5}\ .$$

$$\lim_{x\to 5-} f_3(x) = \lim_{x\to 5-} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5-} x+3 = 5+3 = 8$$
$$\lim_{x\to 5+} f_3(x) = \lim_{x\to 5+} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5+} x+3 = 5+3 = 8$$

Mit der Wahl von $f_3(5) = 8$ lässt sich f_3 in $x_0 = 5$ stetig ergänzen.

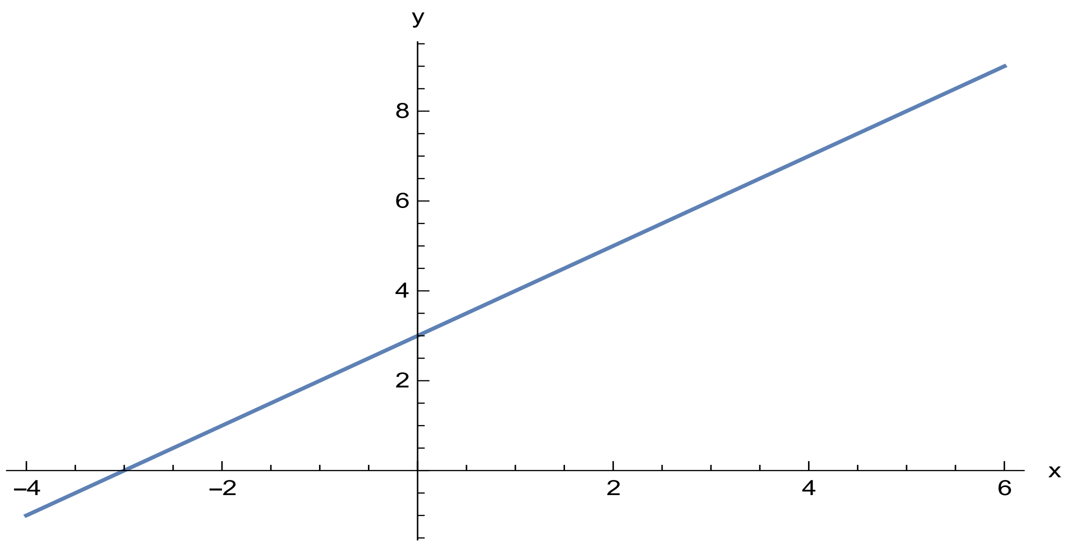


Bild 15 a) (iii) $f_3(x)$

(iv)

$$f_4(x) = \begin{cases} 2x/\pi & , \quad x \leq \pi/2 = x_0 \\ \sin x & , \qquad \pi/2 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pi/2-} f_4(x) = \lim_{x \to \pi/2-} 2x/\pi = 1 = f_4\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to \pi/2+} f_4(x) = \lim_{x \to \pi/2+} \sin x = \sin(\pi/2) = 1$$

f_4 ist stetig in $x_0 = \pi/2$.

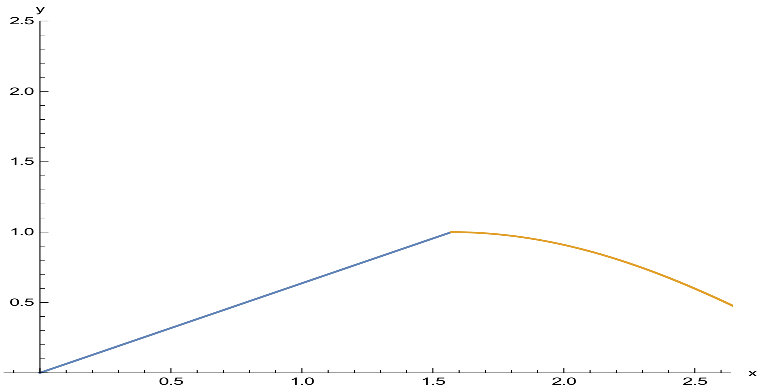


Bild 15 a) (iv) $f_4(x)$

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \\ \ln x & , \quad 1 \le x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$,
so dass f in $x_0 = 1$ stetig wird.

Für die Stetigkeit von g in $x_0 = 1$ muss

$$\lim_{x \nearrow 1} g(x) = \lim_{x \nearrow 1} (x^2 - a) = 1^2 - a \overset{!}{=} g(1) = \ln 1 = 0$$

gelten. Man erhält damit $a = 1$.

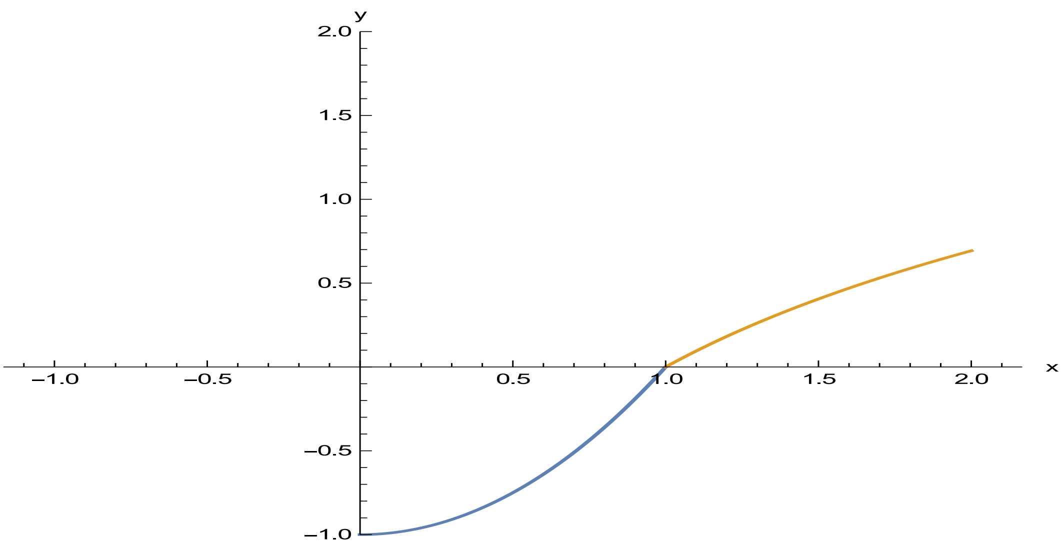


Bild 15 b) $g(x)$ mit $a = 1$

Aufgabe 16:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Lösung:

Da f stetig ist, ergeben sich nach dem Zwischenwertsatz Nullstellen in folgenden Intervallen:

$$f(-3) \cdot f(-2) = (5.568181...) \cdot (-3.272727...) = -18.223140... < 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1^* \in [-3, -2]$$

$$f(-2) \cdot f(-1) = (-3.272727...) \cdot (2.068181...) = -6.768595... < 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2^* \in [-2, -1]$$

$$f(0) \cdot f(1) = 1 \cdot (-3.068181...) = -3.068181... < 0$$

$$\Rightarrow \quad x_3^* \in [0, 1]$$

$$f(1) \cdot f(2) = (-3.068181...) \cdot (17.272727...) = -52.995867... < 0$$

$$\Rightarrow \quad x_4^* \in [1,2]$$

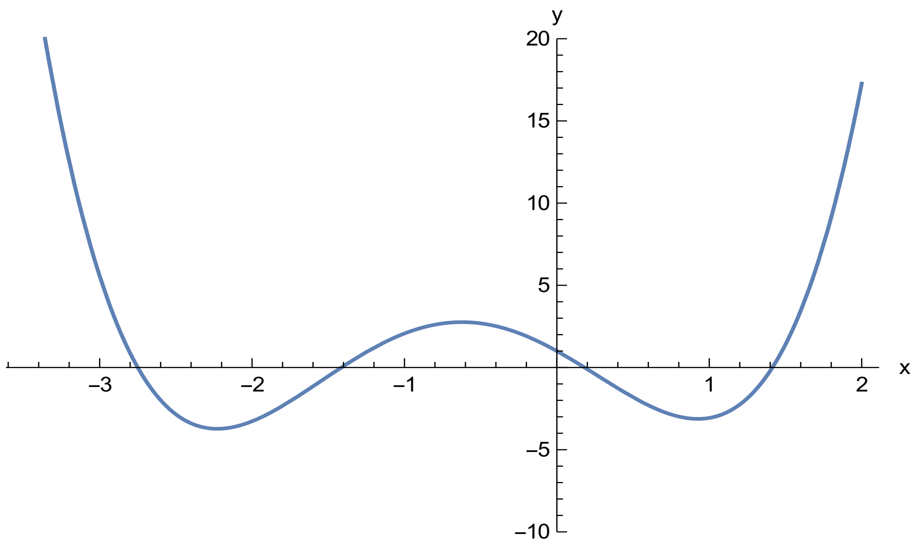


Bild 16 $f(x)$

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1 = (x^2-2)(x+11/4)(x-2/11)$$

Nach Konstruktion lauten die Nullstellen:

$$x_1^* = -\frac{11}{4} = -2.75,\ x_2^* = -\sqrt{2} = -1.41421...,$$

$$x_3^* = \frac{2}{11} = 0.181818....,\ x_4^* = \sqrt{2} = 1.41421...$$

Ein Matlab-Programm zur Nullstellenberechnung mit Bisektion:

```
function x = bisektion(a,b,eps,funkt)
%-------------------------------------------------------
% Berechnet eine Nullstelle mit Hilfe
% des Bisektionsverfahrens
%
% Input: a<b     mit  funkt(a)<0
%                und  funkt(b)>0 (oder umgekehrt)
%        |b-a|<eps   Genauigkeit
%        funkt   Funktion deren Nullstelle gesucht ist
%                muss als inline Funktion definiert sein,
%  z.B.: funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
%
% Output:   x     Nullstellennäherung
%-------------------------------------------------------
  format long
  if(funkt(a)*funkt(b)>=0)
    [a b funkt(a) funkt(b)]
  else
    while(abs(b-a)>=eps)
      x = (a+b)/2;
      [a x b abs(b-a); funkt(a) funkt(x) funkt(b) eps]
      if(funkt(x)==0)
        break
      end
      if(funkt(a)*funkt(x)<0)
        b=x;
      else
        a=x;
      end
```

```
    end
  end


>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-3.0,-2.0,0.001,funkt)

ans =
  -3.0000000  -2.5000000  -2.0000000   1.0000000
   5.5681818  -2.8494318  -3.2727272   0.0010000

ans =
  -3.0000000  -2.75000000  -2.500000   0.5000000
   5.5681818   0            -2.849431   0.0010000


ans =   -2.75000000000000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-2.0,-1.0,0.001,funkt)

ans =
  -2.000000000000  -1.500000000000  -1.000000000000   1.00000000000
  -3.272727272727  -0.525568181818   2.068181818181   0.00100000000
ans =
  -1.500000000000  -1.250000000000  -1.000000000000   0.50000000000
  -0.525568181818   0.939630681818   2.068181818181   0.00100000000
ans =
  -1.500000000000  -1.375000000000  -1.250000000000   0.25000000000
  -0.525568181818   0.234130859375   0.939630681818   0.00100000000
ans =
  -1.500000000000  -1.437500000000  -1.375000000000   0.12500000000
  -0.525568181818  -0.141136863014   0.234130859375   0.00100000000
ans =
  -1.437500000000  -1.406250000000  -1.375000000000   0.06250000000
  -0.141136863014   0.047930890863   0.234130859375   0.00100000000
ans =
  -1.437500000000  -1.421875000000  -1.406250000000   0.03125000000
  -0.141136863014  -0.046279674226   0.047930890863   0.00100000000
ans =
  -1.421875000000  -1.414062500000  -1.406250000000   0.01562500000
  -0.046279674226   0.000910887325   0.047930890863   0.00100000000
ans =
  -1.421875000000  -1.417968750000  -1.414062500000   0.00781250000
  -0.046279674226  -0.022663626587   0.000910887325   0.00100000000
ans =
  -1.417968750000  -1.416015625000  -1.414062500000   0.00390625000
  -0.022663626587  -0.010871108585   0.000910887325   0.00100000000
ans =
  -1.416015625000  -1.415039062500  -1.414062500000   0.00195312500
  -0.010871108585  -0.004978786721   0.000910887325   0.00100000000

ans = -1.415039062500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(0.0,1.0,0.001,funkt)

ans =
              0   0.500000000000   1.000000000000   1.000000000000
   1.00000000000  -1.809659090909  -3.068181818181   0.001000000000
ans =
              0   0.250000000000   0.500000000000   0.500000000000
   1.00000000000  -0.396306818181  -1.809659090909   0.001000000000
ans =
              0   0.125000000000   0.250000000000   0.250000000000
   1.00000000000   0.324152166193  -0.396306818181   0.001000000000
ans =
   0.12500000000   0.187500000000   0.250000000000   0.125000000000
   0.32415216619  -0.032793912020  -0.396306818181   0.001000000000
ans =
   0.12500000000   0.156250000000   0.187500000000   0.062500000000
   0.32415216619   0.146800908175  -0.032793912020   0.001000000000
ans =
   0.15625000000   0.171875000000   0.187500000000   0.031250000000
   0.14680090817   0.057247221469  -0.032793912020   0.001000000000
ans =
   0.17187500000   0.179687500000   0.187500000000   0.015625000000
   0.05724722146   0.012282917106  -0.032793912020   0.001000000000
ans =
   0.17968750000   0.183593750000   0.187500000000   0.007812500000
   0.01228291710  -0.010242020309  -0.032793912020   0.001000000000
ans =
   0.17968750000   0.181640625000   0.183593750000   0.003906250000
   0.01228291710   0.001023891459  -0.010242020309   0.001000000000
ans =
   0.18164062500   0.182617187500   0.183593750000   0.001953125000
   0.00102389145  -0.004608212867  -0.010242020309   0.001000000000

ans =  0.182617187500000
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(1.0,2.0,0.001,funkt)

ans =
   1.00000000000   1.500000000000   2.000000000000   1.000000000000
  -3.06818181818   1.400568181818  17.272727272727   0.001000000000
ans =
   1.00000000000   1.250000000000   1.500000000000   0.500000000000
  -3.06818181818  -1.869318181818   1.400568181818   0.001000000000
ans =
   1.25000000000   1.375000000000   1.500000000000   0.250000000000
  -1.86931818181  -0.538330078125   1.400568181818   0.001000000000
ans =
   1.37500000000   1.437500000000   1.500000000000   0.125000000000
  -0.53833007812   0.349175193093   1.400568181818   0.001000000000
ans =
   1.37500000000   1.406250000000   1.437500000000   0.062500000000
  -0.53833007812  -0.114304715936   0.349175193093   0.001000000000
ans =
   1.40625000000   1.421875000000   1.437500000000   0.031250000000
  -0.11430471593   0.112409477884   0.349175193093   0.001000000000
ans =
   1.40625000000   1.414062500000   1.421875000000   0.015625000000
  -0.11430471593  -0.002192260528   0.112409477884   0.001000000000
ans =
   1.41406250000   1.417968750000   1.421875000000   0.007812500000
  -0.00219226052   0.054795976961   0.112409477884   0.001000000000
ans =
   1.41406250000   1.416015625000   1.417968750000   0.003906250000
  -0.00219226052   0.026223884423   0.054795976961   0.001000000000
ans =
   1.41406250000   1.415039062500   1.416015625000   0.001953125000
  -0.00219226052   0.011996341497   0.026223884423   0.001000000000

ans =  1.415039062500000
```