Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2019/20

Informationen zur Lehrveranstaltung Analysis I.

1. Vorlesung: (wöchentlich)
   Dienstag, 13:15–14:45 Uhr, Audimax I, BU, BVT, EUT, LUM, MB, MTB/MEC, SB, VT
   Donnerstag, 11:30–13.00 Uhr, Audimax II, AIW, ET, IN/IIW
2. Hörsaalübung: (14–täglich)
   Montag, 14:45–16:15 Uhr, Audimax I
   Dienstag, 9:45–11:15 Uhr, Audimax I
3. Übungsgruppen: (14–täglich)
   Im Wechsel mit der Linearen Algebra I, Beginn diese Woche
4. Internetseiten:
   `www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html`
5. Textbuch:
   R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure, Band 1, 3. Auflage, Wiley–VCH, Berlin, 2000.

Inhalte der Vorlesung Analysis I.

1. Aussagen, Logik und Mengen.
2. Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
3. Folgen, Reihen und Konvergenz.
4. Vektorräume und Normen.
5. Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
6. Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
7. Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
8. Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
9. Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

Kapitel 1. Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1. Aussagen

Beispiele für Aussagen (mathematische und nicht–mathematische)

- heute ist Donnerstag
- heute scheint die Sonne
- 16 ist eine Quadratzahl
- 5 ist eine gerade Zahl

Kennzeichnende Eigenschaft mathematischer Aussagen:

Aussagen sind entscheidbar wahr oder falsch.

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen Wahrheitswert $w(A)$ zuordnen:

$$\text{Ist die Aussage } A \text{ falsch, so setzen wir } w(A) = 0$$

$$\text{Ist die Aussage } A \text{ wahr, so setzen wir } w(A) = 1$$

Verknüpfung von Aussagen:

$\neg A$	:	Negation			
$A \wedge B$	:	Konjunktion	$A \vee B$	:	Disjunktion
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:
Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

Also gilt: $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$

Definition:

1. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine wahre Aussage ergibt, heißt **Tautologie**.
2. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine falsche Aussage ergibt, heißt **Kontradiktion**.

Beispiel:

Die folgenden Verknüpfungen sind Tautologien.

1. $$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \;\Rightarrow\; \neg A$$
2. $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beispiel I für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel II für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ist eine Tautologie.

Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Definition und Beispiele für Aussageformen.

Definition:
Ein Aussage, die von Variablen abhängt, heißt **Aussageform**.

Beispiele für Aussageformen.

1. x ist eine gerade Zahl.
2. x ist größer als y.
3. x ist größer als y und y ist größer als z

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen

Beispiel:
Wir definieren eine Aussageform als

$$A(x,y) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$$

1. $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2,1) = 1$,
2. $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3,2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit Quantoren formuliert. Es gibt zwei Grundquantoren:

$\forall$ Allquantor $\exists$ Existenzquantor

sowie den Quantor

$\exists_1$ Existenz mit Eindeutigkeit

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Wir definieren neue Aussagen wie folgt.

1. $\forall x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$.
2. $\exists x : A(x)$, d.h. es gibt mindestens ein x, für das $A(x)$ gilt.
3. $\exists_1 x : A(x)$, d.h. es gibt genau ein x, für das $A(x)$ gilt.

Negation von Quantoren.

Die Wahrheitswerte der Aussagen werden entsprechend definiert.

$$w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1.$$

$$w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{es gibt mindestens ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1.$$

$$w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{es gibt genau ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1.$$

Negation von Quantoren:

$$\neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

$$\neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

Ein Beispiel und Aufgaben zum Einsatz von Quantoren.

Beispiel und Aufgaben:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Big(\ (\varepsilon, \delta)$–Definition der Stetigkeit $\Big)$

2. Man verneine die Aussage

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, n \in \mathbb{N} :\ x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

3. Negation des Stetigkeitsbegriffs

$$\neg\Big(\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes: aus A folgt B, also

$$A \;\Rightarrow\; B \quad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

1. Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B$$

2. Indirekter Beweis (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen Beweis.

Satz:

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade.}$$

Beweis: n gerade $\iff$ n^2 gerade.

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (Zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass n^2 gerade ist.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Satz:
Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = n/m$ mit natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ darstellen.

Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: es gibt teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = n/m$.
Dann gilt

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.
Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist also **falsch** $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational!

1.2. Mengen

Definition:
Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Beispiele für Mengen.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen.
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht–negativen ganzen Zahlen.
3. Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Definition von Mengen.

1. Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \,|\, A(x)\}$.

Bedeutung der verwendeten Symbole.

:= “wird definiert durch”
A(x) Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \iff \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \iff \forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaften und Verknüpfung von Mengen.

Ordnungseigenschaften.

1. $M \subset M$
2. $M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$
3. $M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{llll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N disjunkt.
- Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n–Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

  - der n–dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n–fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Kreisscheibe mit Radius $r = 1$.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Zwei Streifen in der Euklidischen Ebene.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \leq x \leq -2 \;\vee\; 2 \leq x \leq 4\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \,|\, a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \,|\, a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \,|\, a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall} \end{array}$$

- Querschnitt eines T–Trägers.

$$\begin{aligned} M &:= M_1 \cup M_2 \\ M_1 &:= \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\ M_2 &:= \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta] \end{aligned}$$

Kapitel 1. Aussagen, Mengen und Funktionen

1.3. Funktionen

Definition:
Seien M und N Mengen. Unter einer Funktion (oder einer Abbildung) von M nach N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet. Die Zuordnung $x \mapsto y$ ist also eindeutig.

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \to N$, $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \to N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in M \, : \, \exists_1 \, y \in N \, : \, y = f(x)$$

- M nennt man Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f.
- N nennt man Zielmenge (oder Bildbereich) von f.
- Die Menge

$$\mathrm{graph(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \subset M \times N}$$

heißt Graph der Funktion f.

1.3. Funktionen

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

1. Zu $A \subset M$ heißt die Menge
$$f(A) = \{f(a) \in N \,|\, a \in M\} \subset N$$
das Bild von A unter der Funktion f.
2. Zu $B \subset N$ heißt die Menge
$$f^{-1}(B) = \{a \in M \,|\, f(a) \in B\} \subset M$$
das Urbild von B unter der Funktion f.

Für vorgegebene Mengen M und N und eine Funktion $f : M \to N$ definieren wir nun die Begriffe

surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Definition:

Sei $f : M \to N$ eine Funktion von M nach N.

Die Funktion f heißt surjektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für alle $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, y \in N \;:\; \exists\, x \in M \;:\; y = f(x)$$

Weiterhin heißt f injektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, x_1, x_2 \in M \;:\; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Schließlich heißt die Funktion f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Bemerkungen.

1. Eine injektive Funktion $f : M \to N$ lässt sich invertieren, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.
2. Für eine injektive Funktion $f : M \to N$ wird deren Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \to M$ definiert durch
$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für } y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$
3. Falls $f : M \to N$ bijektiv ist, so gilt
$$f(M) = N \quad \text{und} \quad f^{-1}(N) = M$$
4. Die Umkehrfunktion einer reellwertigen injektiven Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Komposition von Funktionen.

Definition: Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ von f und g eine Funktion definiert

$$g \circ f : M \to P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in M$$

Wir erhalten also die Hintereinanderschaltung

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \quad \text{bzw.} \quad M \xrightarrow{g \circ f} P$$

Eigenschaften von Kompositionen.

1. Assoziativität. Es gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
2. Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ, d.h.
$$g \circ f \neq f \circ g$$

Beispiel: Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ.

Wir betrachten die beiden reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ g(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Dann folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) = x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

und somit gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$.

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt die Menge

$$S(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe der Menge M.

Insbesondere ist die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M$, definiert durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$, ein Element von $S(M)$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$ erfüllt die Gruppenaxiome.

$$\begin{array}{llcll} \text{G1)} & h \circ (g \circ f) & = & (h \circ g) \circ f & \text{(Assoziativgesetz)} \\ \text{G2)} & f \circ id_M & = & id_M \circ f = f & \text{(neutrales Element)} \\ \text{G3)} & f \circ f^{-1} & = & f^{-1} \circ f = id_M & \text{(inverses Element)} \end{array}$$

Dabei bezeichnet f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Elementare reelle Funktionen I.

- **Affin–lineare Funktionen.**

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- **Polynome.**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

- Die **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ zur Basis $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Spezialfall: Basis e, wobei die Eulersche Zahl e definiert ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459045235 3\ldots$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle}\, x, y \in \mathbb{R}$$

Elementare reelle Funktionen II.

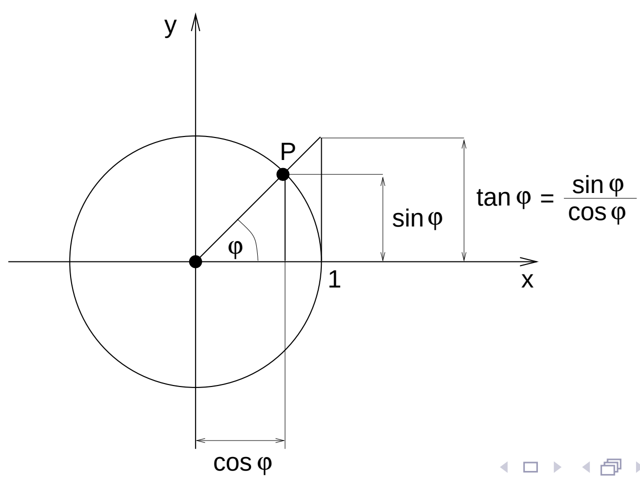
- Der **Logarithmus**: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$f(x) = \log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad a > 0, a \neq 1$$

Spezialfall: Basis e ergibt den natürlichen Logarithmus.

$$\ln(x) = \log(x) = \log_e(x)$$

- **Trigonometrische Funktionen.**
Darstellung am Einheitskreis



Eigenschaften trigonometrischer Funktionen I.

- Wir definieren die trigonometrischen Funktionen über das Bogenmaß.

$$\sin, \cos : [0, 2\pi) \to [-1, 1]$$

- Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

- Periodizität: Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi + 2\pi) \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

somit sind Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen II.

- Symmetrie: Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

- Wertetafel.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- Additionstheoreme.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

2.1. Natürliche Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

der natürlichen Zahlen wird formal durch die Peano–Axiome definiert:

(A1) $1 \in \mathbb{N}$

(A2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

(A3) $n \neq m \Rightarrow (n+1) \neq (m+1)$

(A4) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \neq 1$

(A5) Für $A \subset \mathbb{N}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom gilt :
$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n+1) \in A]) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Bemerkung: Die Nachfolgeabbildung $n \to (n+1)$ ist eine injektiv.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.
Dabei ist die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, d.h. es ist zu zeigen

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : A(n)$$

wobei $A(n)$ eine Aussageform ist, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Beweisschritte der vollständigen Induktion.

(I1) Induktionsanfang: $n = 1$, d.h. zeige $A(1)$.

(I2) Induktionsannahme: Es gelte $A(n)$.

(I3) Induktionsschluss: $n \to n+1$
Zeige die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Sind (I1)-(I3) durchführbar, so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1 zur vollständigen Induktion I.

Bestimme die Anzahl t_n der Teilmengen einer Menge mit n Elementen,

$$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

1. $n = 1$:
   Die Menge $A_1 = \{a_1\}$ besitzt die Teilmengen $\emptyset, \{a_1\}$, d.h. $t_1 = 2$.
2. $n = 2$:
   Die Menge $A_2 = \{a_1, a_2\}$ besitzt die vier Teilmengen
   $$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$$
   und somit gilt $t_2 = 4$.
3. $n = 3$: Die Menge $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ besitzt $t_3 = 8$ Teilmengen.

Vermutung: Es gilt $t_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1 zur vollständigen Induktion II.

Satz: Eine n–elementige Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt 2^n Teilmengen.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $t_1 = 2 = 2^1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $t_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

Zu zeigen: $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ hat 2^{n+1} Teilmengen.

Schreibe $\mathcal{P}(A_{n+1}) = K_1 \cup K_2$ für die Potenzmenge von A_{n+1}, wobei

$$\begin{aligned} T \in K_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \notin T \\ T \in K_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \in T \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme besitzen K_1 und K_2 genau $t_n = 2^n$ Elemente.

Weiterhin gilt nach Konstruktion $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Somit hat $\mathcal{P}(A_{n+1})$ insgesamt $t_{n+1} = t_n + t_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion I.

Bestimme die Anzahl p_n der verschiedenen Anordnungen (Permutationen) für die Elemente einer n–elementigen Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

1. $n = 1$:
   Das Element in $A_1 = \{1\}$ besitzt nur eine Anordnung (1), d.h. $p_1 = 1$.
2. $n = 2$: Für die Elemente in $A_2 = \{1, 2\}$ gibt es zwei Anordnungen
   $$(1, 2), (2, 1).$$
   Somit gilt $p_2 = 2$.
3. $n = 3$: Für die Elemente in $A_3 = \{1, 2, 3\}$ gibt es sechs Anordnungen
   $$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$
   Somit gilt $p_3 = 6$.

Vermutung: Es gilt $p_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion II.

Satz: Es gibt $p_n = n!$ Permutationen für das n–Tupel $(1, 2, \ldots, n)$.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $p_1 = 1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $p_n = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

Es gibt nach Induktionsannahme je $n!$ Permutationen für die $(n + 1)$–Tupel

$$\left\{\begin{array}{c} (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, n+1), \\ (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, n+1, i_n), \\ \vdots \\ (i_1, n+1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n), \\ (n+1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) \end{array}\right\} \quad \underbrace{i_1, \ldots, i_n}_{\text{paarweise verschieden}} \in \{1, \ldots, n\}$$

und somit gilt $p_{n+1} = \underbrace{n! + \ldots + n!}_{(n+1)-fach} = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion III.

Folgerung: Eine n–elementige Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 : 0 \le m \le n$$

m–elementige Teilmengen. Dabei setzt man $0! = 1$.

Klassisches Beispiel: Zahlenlotto. Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Möglichkeiten, aus einer 49–elementigen Menge eine 6–elementige Teilmenge auszuwählen.
Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, beim (klassischen) Zahlenlotto "6 aus 49" die 6 richtigen Zahlen zu tippen, beträgt

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.0000000715112384201 8516\dots$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen I.

Definition:

Allgemeine Summen und Produkte.

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad b_m + b_{m+1} + \dots + b_n \quad (\text{falls } m \le n)$$

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \le n)$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen II.

Definition:

Potenzen.

$$a^n := \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} a & : \text{ für } n \geq 0 \\ 1/(a^{-n}) & : \text{ für } n < 0 \end{cases}$$

Potenzgesetze.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften I.

Definition:

Die (natürlichen) Zahlen $\binom{n}{m}$ nennt man Binomialkoeffizienten.

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

wobei

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt der Binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften II.

Beweis zu Teil a): Es gilt $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \le n)$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-m+1) + n!\,m}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1-m+m)}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \binom{n+1}{m}
\end{aligned}
$$

Beweis: Binomischer Lehrsatz I.

Beweis zu Teil b): durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang $(n = 0)$: Es gilt

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

- Induktionsannahme: Für $n \ge 0$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

- Induktionsschluss $(n \to n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}
\end{aligned}
$$

Beweis: Binomischer Lehrsatz II.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\, a^k\, b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0$$

$$= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1\cdot a^0 b^5 + 5\cdot a^1 b^4 + 10\cdot a^2 b^3 + 10\cdot a^3 b^2 + 5\cdot a^4 b^1 + 1\cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

2.2. Primzahlen

Definition: Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $n \in \mathbb{N}$, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n = k \cdot m$$

Man schreibt dann auch $m|n$.

Jede Zahl besitzt offensichtlich die beiden Teiler 1 und n, denn es gilt stets

$$n = n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

Existiert für $n > 1$ kein weiterer Teiler, so nennt man n eine Primzahl. Die ersten Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Bemerkung: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Hauptsatz der Zahlentheorie.

Satz: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ läßt sich als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben,

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$$

wobei p_j Primzahl und $r_j \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq j \leq k$.

Beweis: durch Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $1 = 2^0$.
- Induktionsannahme: Alle $k \leq n$ besitzen Primfaktorzerlegung.
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

Fall 1: Sei $n + 1$ eine Primzahl. Dann gilt $n + 1 = (n + 1)^1$.

Fall 2: Sei $n + 1$ keine Primzahl. Dann gibt es $k, m \leq n$ mit $n + 1 = k \cdot m$.

Somit besitzt $n + 1$ eine Primfaktorzerlegung, da k und m je eine besitzen.

Der ggT und das kgV.

Definition: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Dann heißt

$$\text{ggT}(n, m) := \max\{k \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}$$

der größte gemeinsame Teiler (ggT) von n und m. Weiterhin heißt

$$\text{kgV}(n, m) := \min\{k \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von n und m.

Beobachtung: Für

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k} \quad \text{und} \quad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$$

mit Primfaktoren $p1, \ldots, p_k$ und Exponenten $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(n, m) &= p_1^{\min(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\min(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(r_k,s_k)} \\
\text{kgV}(n, m) &= p_1^{\max(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\max(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(r_k,s_k)}
\end{aligned}$$

Beispiel zu ggT und kgV.

Beispiel: Für

$$\begin{aligned}
n &= 525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \\
m &= 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(525, 180) &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15 \\
\text{kgV}(525, 180) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300
\end{aligned}$$

und

$$n \cdot m = 525 \cdot 180 = 15 \cdot 6300 = \text{ggT} \cdot \text{kgV}$$

Beobachtung: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot m = \text{ggT}(n, m) \cdot \text{kgV}(n, m)$$

Der Euklidische Algorithmus.

Für $n, m \in \mathbb{N}$ läßt sich der ggT mit dem Verfahren der iterierten Division bestimmen.

Vorüberlegung: Zu $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, existieren eindeutige $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = q \cdot m + r, \quad \text{wobei } 0 \leq r < m.$$

(Euklidischer) Algorithmus:

INPUT: $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$.

- Setze $r_0 = n$, $r_1 = m$ und $j = 1$;
- **REPEAT**
  - $r_{j-1} = q_j \cdot r_j + r_{j+1}$, wobei $0 \leq r_{j+1} < r_j$;
  - Setze $j = j + 1$;

  UNTIL $(r_{j+1} = 0)$

OUTPUT: $r_j = ggT(n, m)$.

Beispiel zum Algorithmus und $\mathbb{Z}$–Kombination.

Beispiel: Für $n = 3054$ und $m = 1002$ liefert der Euklidische Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3054 & = & 3 & \cdot & 1002 & + & 48 \\ 1002 & = & 20 & \cdot & 48 & + & 42 \\ 48 & = & 1 & \cdot & 42 & + & 6 \\ 42 & = & 7 & \cdot & \boxed{6} & + & 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ ggT(3054,1002) $= 6$, kgV(3054,1002) $= 3054 \cdot 1002/6 = 510018$.

$\mathbb{Z}$–Kombination des ggT(n, m) von n und m.

$$\begin{aligned} 6 &= 48 - 1 \cdot 42 = 48 - 1 \cdot (1002 - 20 \cdot 48) = 21 \cdot 48 - 1002 \\ &= 21 \cdot (3054 - 3 \cdot 1002) - 1002 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002 \end{aligned}$$

Die $\mathbb{Z}$–Kombination von $n = 3054$ und $m = 1002$ ist gegeben durch

$$\text{ggT}(3054, 1002) = 6 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002$$

2.3. Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

- Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beachte: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aber: Die Zahl $\sqrt{2}$ läßt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$ *approximieren*, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\sqrt{2} - q| < \varepsilon$$

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

(I) Regeln der Addition ($(\mathbb{R}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe):

$$\begin{array}{llcll}
\text{(a)} & x + (y+z) & = & (x+y)+z & \\
\text{(b)} & x + y & = & y + x & \\
\text{(c)} & x + 0 & = & 0 + x & = \; x \\
\text{(d)} & x + (-x) & = & (-x) + x & = \; 0
\end{array}$$

(II) Regeln der Multiplikation ($(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelsche Gruppe):

$$\begin{array}{llcll}
\text{(a)} & x \cdot (y \cdot z) & = & (x \cdot y) \cdot z & \\
\text{(b)} & x \cdot y & = & y \cdot x & \\
\text{(c)} & x \cdot 1 & = & 1 \cdot x & = \; x \\
\text{(d)} & x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) & = & \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x & = \; 1 \quad (x \neq 0)
\end{array}$$

(III) Distributivgesetz (Regeln (I)–(III): Körperaxiome):

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Weitere Axiome für die reellen Zahlen.

(IV) Ordnungseigenschaften

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & x \le y \vee y \le x \\
\text{(b)} & x \le x \\
\text{(c)} & (x \le y \wedge y \le x) \Rightarrow x = y \\
\text{(d)} & (x \le y \wedge y \le z) \Rightarrow x \le z \\
\text{(e)} & x \le y \Rightarrow x + z \le y + z \\
\text{(f)} & (x \le y \wedge z \ge 0) \Rightarrow x \cdot z \le y \cdot z
\end{array}
$$

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872)

Sei $\mathbb{R} = L \cup R$ zerlegt in nichtleere Mengen mit $\forall x \in L, y \in R : x < y$. Dann gibt es genau eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in L, y \in R : \quad (x \le s \le y)$$

Eine Bemerkung und Rechnen mit Ungleichungen.

Bemerkung: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom (V). Denn für

$$
\begin{aligned}
L &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\} \\
R &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\}
\end{aligned}
$$

gibt es keine Schnittzahl. Diese wäre $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere Regeln beim Rechnen mit Ungleichungen (mit den Axiomen (IV))

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x \le y \Rightarrow -x \ge -y \\
(2) & (x \le y \wedge z \le 0) \Rightarrow x \cdot z \ge y \cdot z \\
(3) & x^2 \ge 0 \\
(4) & (x \le y \wedge u \le v) \Rightarrow x + u \le y + v \\
(5) & (0 \le x \le y \wedge 0 \le u \le v) \Rightarrow x \cdot u \le y \cdot v
\end{array}
$$

Der Betrag einer reellen Zahl.

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der Betrag von a. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $|a - b|$ der (nichtnegative) Abstand der Zahlen a und b.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (1) & |a| \geq 0 \\ (2) & |a| = 0 \Rightarrow a = 0 \\ (3) & |ab| = |a|\,|b| \\ (4) & |a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ (5) & U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0) \\ & \qquad = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad (\varepsilon\text{–Umgebung von } a) \end{array}$$

Obere und untere Schranke, Supremum und Infimum.

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1) Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, falls gilt:

$$\forall\, w \in M : \; w \leq x$$

   Analog definiert man den Begriff untere Schranke von M.

2) Die Menge M heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

3) Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, mit Notation

$$s = \sup_{x \in M} M = \sup(M),$$

   falls s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h.

   - s ist eine obere Schranke von M
   - für jede beliebige obere Schranke x von M gilt: $s \leq x$

   Analog definiert man den Begriff Infimum von M.

Beispiele zu Supremum und Infimum.

Beispiel: Betrachte das Intervall $I = [1,2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \le x < 2\}$
Dann ist

- jede Zahl $x \ge 2$ eine obere Schranke von I,
- jede Zahl $x \le 1$ eine untere Schranke von I.

Also gilt

$$\sup\,[1,2) = 2 \qquad \inf\,[1,2) = 1$$

Beispiel: Betrachte die Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert durch

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1},\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots \right\}$$

Dann gilt

$$\sup M = \frac{3}{2} \qquad \inf M = 0$$

Zur Existenz eines Supremums und Infimums.

Satz: Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweis: Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms.

Folgerungen:

1) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.
2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; 0 < \frac{1}{n} < x$$

3) Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es immer (unendlich viele) rationale Zahlen.

Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

3.1. Normierte Vektorräume

Definition:

Sei V ein Vektorraum (oder linearer Raum) über (dem Körper) $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heißt Norm auf V, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Definitheit).

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (Homogenität).

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

V zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann normierter Vektorraum.

Beispiele für normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der p–Norm, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

Spezialfall: Für $p = 2$ bekommt man die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin $(p = \infty)$: Die Maximumnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

3.2. Folgen

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist
$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
eine reelle Folge.
- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist
$$a_n = i^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
eine komplexe Folge.

Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), d.h. $V = \mathbb{R}^d$ oder $V = \mathbb{C}^d$, z.B. ist
$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } d = 3$$
eine Folge reeller Vektoren.
- Funktionenfolgen (Folgen von Funktionen), etwa $V = \mathcal{C}[a,b]$, z.B. ist für $[a,b] = [0,1]$ die Folge
$$f_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$
eine Funktionenfolge.

Bemerkung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}[a,b]$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$
\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich rekursiv beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte Iterationsvorschrift bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der Iterationsvorschrift.

FOR $n = 1, 2, \ldots$

$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2;$

IF $f(x) = 0$ THEN RETURN

IF $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$ THEN

$u_n := x; \quad v_n := v_{n-1};$

ELSE

$u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;$

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel zum Bisektionsverfahren.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[1, 2]$.
Die gesuchte Nullstelle liegt bei $x = \sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton–Verfahren.

Ziel: Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Verwende die Newton–Iteration:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } f'(x_n) \neq 0$$

mit Startwert x_0.

Das Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	...
x_n	1.0000	1.5000	1.41667	1.4142 15686	1.4142 13562	...

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, falls es ein $C > 0$ gibt mit
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$$
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$
Eine nicht–konvergente Folge heißt divergent.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n, m \geq N \;:\; \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Konvergenz von Folgen.

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

a) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt;

b) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy–Folge;

c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis von a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}$$

Also
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$$

Konvergenz von Folgen.

Beweis von b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$.

Beweis von c): Sei (a_n) konvergent mit verschiedenen Grenzwerten a und $\bar{a}$, $a \neq \bar{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \bar{a}\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N(\varepsilon), \overline{N}\varepsilon)\}$ die Ungleichung

$$\|a - \bar{a}\| = \|a - a_n + a_n - \bar{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \bar{a}\| < 2\varepsilon$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \bar{a}$ im Widerspruch zu $a \neq \bar{a}$.

Bemerkungen zur Konvergenz von Folgen.

Notation: Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \;\; (n \to \infty)$$

Uneigentliche Konvergenz ...

...bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für reelle Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \; a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \; a_n < -C$$

Vollständige Räume bzw. Banachräume, Hilberträume.

Bemerkung.
Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. Banachräumen.

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man auch

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$.

Rechnen mit konvergenten Folgen.

Satz: Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und (λa_n) für $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$), wobei gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Beweis: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial.

Die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge.

Definition: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

a) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) linear konvergent, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\forall\, n \geq N: \; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

b) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) superlinear konvergent, falls es eine nicht–negative Nullfolge $C_n \geq 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \; \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

c) Die Folge (a_n) heißt konvergent mit der Ordnung (mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht–negative Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p$$

Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

3.3. Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\text{monoton wachsend} \iff \forall\, n < m: \; a_n \leq a_m$$

$$\text{streng monoton wachsend} \iff \forall\, n < m: \; a_n < a_m$$

$$\text{nach oben beschränkt} \iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \leq C$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\text{monoton fallend} \iff \forall\, n < m: \; a_n \geq a_m$$

$$\text{streng monoton fallend} \iff \forall\, n < m: \; a_n > a_m$$

$$\text{nach unten beschränkt} \iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \geq C$$

3.3 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon)$$

Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{(Intervallschachtelung)}$$

Dann sind beide Folgen konvergent. Gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \qquad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$$

Beispiel: Prinzip der Intervallschachtelung.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$a_0 := a \qquad b_0 := b$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden eine *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\operatorname{agm}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt arithmetisch–geometrisches Mittel von a und b.

Bernoullische Ungleichung und die geometrische Folge.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N} :\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

wobei Gleichheit nur bei $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Die Geometrische Folge.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die reelle Folge mit $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl}
q > 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 & : & \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 & : & (q^n) \quad \text{beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 & : & (q^n) \quad \text{divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{array}$$

Weitere Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

b) $\forall\, n \,:\, b_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

c) $\forall\, n \,:\, a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Beweis zu a): Für hinreichend große n gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n|\cdot|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| \\ &\leq C_a\cdot|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| < (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Für b) und c) siehe Textbuch von Ansorge/Oberle.

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Es gilt

$$(n^2 + 5n + 1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n\right)$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

Kapitalverzinsung: Anfangskapital K_0, Jahreszinssatz p

$$\begin{array}{lcll}
K_1 & = & K_0(1+p) & \text{jährlich} \\
K_2 & = & K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 & \text{halbjährlich} \\
K_4 & = & K_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4 & \text{vierteljährlich} \\
K_{10} & = & K_0\left(1+\frac{p}{10}\right)^{10} & \text{monatlich} \\
K_{360} & = & K_0\left(1+\frac{p}{360}\right)^{360} & \text{täglich}
\end{array}$$

Untersuche die Konvergenz der Folge (a_n), also

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad ?$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Für $p > 0$ zeigt man, dass

a) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

b) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq 4^l \quad (\text{wobei } l \in \mathbb{N} \text{ mit } l \geq p)$$

Damit konvergiert die Folge und für den Grenzwert erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^p$$

Die Grenzwertformel gilt auch für negative p und als Spezialfall erhalten wir die Eulersche Zahl,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\,81828\ \ldots$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Zur Erinnerung:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; \forall\, n, m \geq N : \; \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Für den Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums benötigen wir

a) das Prinzip der Häufungspunkte von Folgen,
b) den Satz von Bolzano und Weierstraß.

Häufungspunkte und Satz von Bolzano und Weierstraß.

Definition:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ als Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Beispiel: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die komplexe Folge mit $a_n = i^n$. Dann besitzt (a_n) die vier Häufungspunkte $\{i, -i, 1, -1\}$.

Satz: (Satz von Bolzano und Weierstraß)
Jede reelle beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweisidee:
Verknüpfe das Bisektionsverfahren mit einer Intervallschachtelung:
Ist die Folge (a_n) beschränkt, so liegen alle Folgenglieder in einem endlichen Intervall $[A, B]$ und man kann rekursiv Teilintervalle $[A_k, B_k]$ definieren mit $A_k \nearrow$ und $B_k \searrow$.

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: für n und $N = N(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt für $m, n_k \geq N(\varepsilon/2)$

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Notation:
$\liminf a_n =$ kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n =$ größter Häufungspunkt

Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

3.4. Konvergenz in normierten Vektorräumen

Im letzten Abschnitt 3.3. haben wir uns mit Konvergenzkriterien für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschäftigt.

Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ wieder allgemein ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

Definition:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Beispiel:
Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

3.4. Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel:
Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

in $\mathcal{C}[0,1]$, d.h. $f_n \in \mathcal{C}[0,1]$ für alle $n \geq 2$.

Unsere Frage:
Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im normierten Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$?

Unsere Antwort:
Bei ∞–dimensionalen Räumen hängt die Konvergenz von der Norm ab!

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Satz: (Normäquivalenzsatz)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es zwei Konstanten $C, C' > 0$ mit

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\| \quad \text{für alle } v \in V$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V.

Folgerung:
In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, aber nicht von der zugrundeliegenden Norm.

Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Satz: Eine Folge $(\mathbf{x}_m)$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

Beweis: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, 1 \le j \le n: \; |x_j^{(m)} - x_j| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty$$

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2+2m+3}{2m^2-1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)^T$$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt daher auch

1. das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$\mathbf{a}_m \to \mathbf{a} \quad (m \to \infty)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0: \; \exists N = N(\varepsilon): \; m, n \ge N \; : \; \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

2. und der Satz von Bolzano, Weierstraß

   Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Rightarrow (a_n) \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0 \; (n \to \infty) \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0$$

3.5. Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $a_n \in \mathbb{C}$), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

eine reelle (oder komplexe) Reihe.

Die Folgenglieder s_n der Reihe werden als Partialsummen bezeichnet.

Falls die Folge (s_n) der Partialsummen gegen einen Grenzwert s konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, so schreibt man

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

für den Grenzwert der Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Satz: (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Es gilt das Cauchysches Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 : \exists N : \forall\, m, n \geq N \; : \; \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Beweis:

a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy–Kriterium für Folgen.

b) folgt aus dem ersten Teil für den Spezialfall $m = n$.

Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz:

a) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen $\sum(a_k + b_k)$, $\sum(\lambda a_k)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

b) Leibnizsches Kriterium: Eine alternierende Reihe der Form $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht–negativen) Folgenglieder $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beweis zum Leibnizschen Kriterium für Reihen.

Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \qquad v_n := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\ v_n - u_n &= a_{2n} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Somit bilden die Folgen (u_n), (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \quad \leq \quad v_n$$

Beispiele: die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1}$$

Insbesondere mit $x = 1$, $y = q \neq 1$ und $m = n+1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert.

Beispiele: die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m} 1 = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

und somit ist das Cauchy–Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N : \; m, n \geq N \; : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

Beispiele: die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314\ldots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe.

Zur Erinnerung: Alternierende Reihen $\sum(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht–negativen) Folgenglieder eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind konvergent.

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ist nicht absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die nicht konvergiert.

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: Sei $\sum a_k$ ein Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\iff$ $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ beschränkt

b) Majorantenkriterium

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

c) Quotientenkriterium Sei $a_k \neq 0$ $(\forall\, k \geq k_0)$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

d) Wurzelkriterium

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Beweis:

a): Die Folge $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

b): Da $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent.

Nach Teil a) ist die Folge $(\sum_{k=0}^{n} b_k)_{n\geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass die Folge $(\sum_{k=0}^{n} |a_k|)$ beschränkt und somit nach a) absolut konvergent ist.

Beweis: (Fortsetzung)

c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq k_0$ folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$ per Induktion.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q}}_{\text{Beschränktheitskonstante}}\end{aligned}$$

für alle n.

Nach Teil a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann auch absolut konvergent.

Beweis: (Fortsetzung)

d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ $(k \geq k_0)$ folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$ und

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent}$$

Bemerkung:

a) Das Quotienten– bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe mit Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.
Einige Grenzwerte (ohne Beweis)

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\dfrac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\,(k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \to \quad 0 \quad (k \to \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$.

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf $\mathbb{N}_0$.
Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das Ausmultiplizieren von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für endliche Summen gilt

$$(a_0 + \ldots + a_m) \cdot (b_0 + \ldots + b_n) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Beachte: Jedes Indexpaar $(k,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt genau einmal auf.

Multiplikation von Reihen.

Satz: Die Reihen $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ seien absolut konvergent. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, eine bijektive Abbildung. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} |a_k|\,|b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right) < \infty$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Multiplikation von Reihen.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Für $m = (n+1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

und somit

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Das Cauchy–Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Man erhält damit das Cauchy–Produkt der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots\end{aligned}$$

Anwendung des Cauchy–Produkts.

Für die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{Z})$$

gilt die Funktionalgleichung: $\quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z), z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)
\end{aligned}$$

Kapitel 4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \to W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt Häufungspunkt von D, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; x_n \in D, \quad x_n \neq x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

- D' bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von D.
- $\overline{D} = D \cup D'$ bezeichnet den topologischen Abschluss von D.
- Die Menge D heißt abgeschlossen, falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt.

4.1. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Definition:

- Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnet

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel um x_0 mit Radius ε. Die Menge

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} := \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε.

- $D \subset V$ heißt beschränkt, falls es $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$.
- $x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D, falls es $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.
- D^0 bezeichnet die Menge aller inneren Punkte von D.
- D heißt offen, falls $D^0 = D$ gilt.

Beispiele zur letzten Definition.

- Die Menge $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ \overline{D} &= (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty) \\ D^0 &= (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K_\varepsilon(x_0)}$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind immer Häufungspunkte von D, denn

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \quad \to \quad x_0, \quad (n \to \infty) \quad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Grenzwerte von Funktionen.

Definition:
Gegeben sei eine Funktion $f : D \to W$, $D \subset V$ und ein $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert y_0, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

  Man verwendet in diesem Fall die Notation $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

- Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich einseitige Grenzwerte wie folgt definieren.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \; : \; x_n \in D, \; x_n < x_0 : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \; : \; x_n \in D, \; x_n > x_0 : \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Beispiele zu Grenzwerten von Funktionen.

Beispiel 1: Betrachte die Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ für } x < 0 \text{ bzw. } x = 1 \\ 1 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Für $x \to 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ noch $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen uneigentlichen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen.

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

- Für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x),\ldots,f_n(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x),\ldots,\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Stetige Funktionen.

Definition:

Sei $f : D \to W, D \subset V$ eine Funktion.

1) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig ergänzbar in $x_0 \in D'$, falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{existiert und endlich ist.}$$

2) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig in $x_0 \in D \cap D'$, falls

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

3) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig, falls $f(x)$ in allen Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Satz: (ε–δ–Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) $f(x)$ ist stetig in x_0, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) $\forall\, \varepsilon > 0 : \; \exists\, \delta > 0 : \; \forall\, x \in D :$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweisidee:

Für die Richtung a) $\Rightarrow$ b) führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Für die Richtung b) $\Rightarrow$ a) machen wir einen direkten Beweis.

ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Annahme: $\exists\, \varepsilon > 0 : \; \forall\, \delta > 0 : \; \exists\, x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ $\Rightarrow$ Widerspruch.

ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Beweis b) $\Rightarrow$ a): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D \;:\; \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Beispiele stetiger Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \to W$, $f(x) = a \in W$ sind stetig.
- Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, definiert durch $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C})$$

  sind stetig.
- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in n reellen (oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

  sind stetig.

Weitere Beispiele stetiger Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

  ist auf dem Bereich, auf dem die Reihe absolut konvergiert, stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

- Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

  Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

Eigenschaften stetiger Funktionen.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : \; f(x_0) = 0$$

a) Zwischenwertsatz.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : \; f(x_0) = c$$

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion. Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Min–Max–Eigenschaft. Die Funktion f nimmt ihr Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Eigenschaften stetiger Funktionen.

Wichtige Bemerkung:

Für die Gültigkeit der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein kompaktes (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in D = (0, \infty)$$

Es gilt

$$D' = [0, \infty), \qquad D \cap D' = (0, \infty)$$

Die Funktion ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min–Max–Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge** D konvergente Teilfolge

$$\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}_0 \in D \quad (j \to \infty)$$

besitzt.

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so nimmt f auf D Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

Merkregel:

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) D ist kompakt.

b) D ist abgeschlossen und beschränkt.

c) Heine–Borel–Überdeckung. Jede offene Überdeckung von D besitzt eine **endliche** Teilüberdeckung, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I \;:\; D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

Beispiel: Die Einheitssphäre S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

ist kompakt.

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: Eine Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt: $\forall\, \varepsilon > 0 : \;\exists\, \delta > 0 : \;\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in D :$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon$$

Satz:
Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum D ist gleichmäßig stetig.

Bemerkung:
Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D.

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst:

Einleitung auf Folie bzw. an der Tafel

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung

(Differentialquotient)

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von f bezüglich x.

2) Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung oder Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Definition: (Fortsetzung)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

3) Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0.

Bemerkung:
Falls f in x_0 differenzierbar ist, so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f bei x_0 überein.

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für die (erste) Ableitung von f.

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

Weitere Beispiele zur Ableitung von Funktionen.

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}, 0 \le k \le n$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, k \, x^{k-1}$$

Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

Funktion	**Ableitung**	**Parameter**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig.

Wichtige Differentationsregeln.

Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Weitere wichtige Differentationsregeln.

Satz:

a) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. Falls f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$, so ist auch die Komposition $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0))$$

c) Ist $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, und sind $f, g : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion (f, g) in x_0 differenzierbar, und es gilt die verallgemeinerte Produktregel
$$\frac{d}{dx}(f(x), g(x))|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0))$$

Ableitungen höherer Ordnung.

1. Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$.
2. Ist $f'(x)$ überall differenzierbar, so erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$ von f, usw.
3. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist zudem die n–te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ n–mal stetig differenzierbar oder auch $\mathcal{C}^n$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$.
4. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f beliebig oft differenzierbar (unendlich oft differenzierbar) oder auch $\mathcal{C}^\infty$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$.
5. Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ nur stetig, so heißt f C^0–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

5.1. Extremwerte, Mittelwertsätze, Satz von Taylor

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum und $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset V$, eine Funktion. Dann hat die Funktion f in $x_0 \in D$

1) ein globales Maximum, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2) ein strenges globales Maximum, falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$.
3) ein lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : \quad \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)$$

4) ein strenges lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : \quad 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Besitzt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt:

1. $f'(x_0) \leq 0$ ($f'(x_0) \geq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,
2. $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & : \quad x_0 < x \leq \min(x_0 + \varepsilon, b) \\ \geq 0 & : \quad \max(x_0 - \varepsilon, a) \leq x < x_0 \end{cases}$$

und daher $f'(x_0^-) \geq 0$ und $f'(x_0^+) \leq 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$.

Definition: Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt stationärer Punkt von f.

Ein Beispiel zu Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

- Stationäre Punkte: $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- Globale Minima bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- Globale Maxima bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$.

Mittelwertsätze.

a) Satz von Rolle
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \;:\; f'(x_0) = 0$$

b) Erster Mittelwertsatz
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b), so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c) Zweiter Mittelwertsatz
Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a, b) : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweise der Mittelwertsätze I.

a) Satz von Rolle
Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b), woraus $f'(x_0) = 0$ folgt.

b) Erster Mittelwertsatz
Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen vom Satz von Rolle, $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a))$$

Beweise der Mittelwertsätze II.

c) Zweiter Mittelwertsatz
Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - g(b)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = h(b). \end{aligned}$$

Somit gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Monotone Funktionen:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $I \subset \mathbb{R}$ (Intervall). Dann gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton wachsend} \\
f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton wachsend} \\
f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton fallend} \\
f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton fallend}
\end{array}
$$

Beispiel: Betrachte $f(x) = x - \ln(x+1)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

ist f streng monoton fallend auf $(-1, 0)$, streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

Die Landau–Symbole.

Definition: Für eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, C, \varepsilon > 0 : \ \forall\, 0 < |h| < \varepsilon : \ \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

Bedeutung:
$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k.
$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ mindestens so schnell gegen Null wie h^k.

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Taylor–Entwicklungen und Taylor–Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

Nullte Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

Erste Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

Zweite Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Denn es gilt $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ und eine Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

Satz von Taylor.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^n$–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) Taylor–Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den Entwicklungspunkt.

Ist f eine $\mathcal{C}^{n+1}$–Funktion, so gilt die Lagrange–Restgliedformel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0| \end{aligned}$$

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.
Beachte: Für die j–te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x - x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.
Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = T_n(x; x_0)$$

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit Taylorschen Satz gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

1) Integraldarstellung

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Cauchy–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

3) Schlömilch–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\, n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$

Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0) \\ R_n(x;0) &= \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Daraus bekommt man für $0 \leq x \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ erhält man $|R_{10}(x;x_0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$.

Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \text{ und } \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

mit dem Lagrange–Restglied

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x;0)| \leq \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \leq \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}$$

Bemerkungen zu Taylor–Reihen.

- Die Taylor–Reihe

$$T_\infty(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer $\mathcal{C}^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Falls die Taylor–Reihe $T_\infty(x;x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x;x_0)$ nicht notwendigerweise gegen f.
- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f reell analytisch oder $\mathcal{C}^\omega$–Funktion.

Beispiele: $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: Gilt für eine $\mathcal{C}^{n+1}$–Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a,b] : \; f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n–ten Grades.

Beweis: Für das Lagrange–Restglied gilt

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) = T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beispiel: Taylor–Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad n, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom n–ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

identisch zu $f(x)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Damit ist das Taylor–Polynom $T_n(x; x_0)$ nur eine Umordnung von f bezüglich des Punktes x_0.

Anwendung: Konvergenz des Newton–Verfahrens.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 in der Nähe von x^* quadratisch konvergent.

Beweis: Betrachte Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f'' > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f'' < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

für ein ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.
Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 strikt positiv, d.h.

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \; f''(x) > 0 \;\text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) Der stationäre Punkt ist ein strenges lokales Extremum.

2) Der stationäre Punkt ist ein Wendepunkt.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{2n}$–Funktion mit

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \le k \le 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f^{(2n)} > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f^{(2n)} < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweisidee: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0|$$

Beispiel zu lokalen Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$ und berechne die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \end{aligned}$$

Es gilt: $\quad f'(x_0) = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0 = \frac{4}{5}$.

1) Der Punkt $x_0 = 0$ ist ein strenges lokales Maximum, denn

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = -24$$

2) Der Punkt $x_0 = 4/5$ ist ein strenges lokales Minimum, denn

$$f''(4/5) = \frac{16}{25}(20 \cdot \frac{4}{5} - 12) = 64/25 > 0$$

Konvexe und konkave Funktionen.

Definition:
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex (oder eine Linkskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt konkav (oder eine Rechtskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \ge f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten die Ungleichungen jeweils strikt, d.h. mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen streng konvex beziehungsweise streng konkav.

Interpretation und Kriterien.

Interpretation: Eine Funktion heißt konvex, falls gilt

$$f(x) \leq g(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $g(x)$ ist linear (also eine "Gerade") mit

$$g(x_1) = f(x_1) \quad \text{und} \quad g(x_2) = f(x_2)$$

und die Funktionswerte von $f(x)$ liegen unterhalb der Geraden.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl}
f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konvex} \\
f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konvex} \\
f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konkav} \\
f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konkav}
\end{array}$$

Wendepunkte.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Links–Rechtskurve)
- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Rechts–Linkskurve)

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^3$–Funktion.

1) **Notwendiges Kriterium:** Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$
2) **Hinreichende Kriterien:**
   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts–Linkskurve.

   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links–Rechtskurve.

5.2. Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

1. beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

2. beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Die erste Regel von de l'Hospital.

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatzes gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für einen Punkt ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.

Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Weitere Regeln von de l'Hospital.

1. Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\text{und}\quad\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$$

3. Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\quad\text{und}\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: Seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit de l'Hospital und der Substitution $y=1/x$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{y\to 0^+}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)}\\ &=\lim_{y\to 0^+}\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$, und es gelte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beispiel: Betrachte die `sinc-Funktion` $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Weitere Beispiele zur Regel von de l'Hospital.

Beispiel:

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

5.3. Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f.

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

1. Definitionsbereich
2. Symmetrien
3. Pole (Singularitäten)
4. Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der (lokalen) Extrema (inkl. Monotoniebereiche)
7. Wendepunkte (inkl. Konvexität und Konkavität)
8. Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im Folgenden bezeichne $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist symmetrisch zur y–Achse (bzw. f ist eine gerade Funktion), falls

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f ist symmetrisch zum Ursprung (bzw. f ist eine ungerade Funktion), falls

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f besitzt einen (algebraischen) Pol in $x_0 \in D$, falls

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

  wobei $k \in \mathbb{N}$ (Ordnung des Pols) und g stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.

  k ungerade $\Rightarrow$ Pol mit Vorzeichenwechsel.

  k gerade $\Rightarrow$ Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt Asymptote von f für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- Monotoniebereiche. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f (streng) monoton wachsend bzw. (streng) monoton fallend ist.
- Konvexität und Konkavität. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f konvex bzw. konkav ist.

Beispiel zur Kurvendiskussion I.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$

1. Definitionsbereich. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f nicht stetig ergänzbar, denn $\lim\limits_{x \to 0} (2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

2. Symmetrien. keine, f ist weder gerade noch ungerade.

3. Pole: $x_0 = 0$ ist ein Pol ohne Vorzeichenwechsel, $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$.

4. Asmptotik. Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2$$

und somit ist $y = 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion II.

5. Nullstellen. Es gilt

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f.

6. Lokale Extrema. Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x+8}{x^3}$$

sowie

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 & \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} & \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty & \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

Bei $x = \frac{8}{3}$ liegt also ein stationärer Punkt vor und gleichzeitig (wegen der Monotonie) ein strenges lokales Maximum. Alternative zur Monotonie:

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \quad \Longrightarrow \quad f''(\frac{8}{3}) = -\frac{27}{64} < 0.$$

Beispiel zur Kurvendiskussion III.

7. Wendepunkte. Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = \frac{96-18x}{x^5}$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiter ist $f^{(3)} = \frac{3}{128} > 0$.
Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts–Linkskurve vor.
Zudem gilt

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 & \text{(streng konkav)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < 4 & \text{(streng konkav)} \\ > 0 & \text{für } 4 < x < \infty & \text{(streng konvex)} \end{cases}$$

8. Skizze.

5.4. Fixpunkt–Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0, sodass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*)$$

Grundidee der Fixpunkt–Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mit der Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt–Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan x_k \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms.

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen I.

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt Lipschitz–stetig auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L nennt man Lipschitz–Konstante.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt kontrahierend, falls Φ Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstanten $L < 1$ ist. Man nennt in diesem Fall L die Kontraktionskonstante von Φ.

Bemerkung:

- Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen II.

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: Jede $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup \{|\Phi'(x)| \;:\; a \leq x \leq b\}$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \leq L\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\ln(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist nicht Lipschitz–stetig auf $[0, \infty)$.

Der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$.
2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

3) Es gilt die a priori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L}\|x_1 - x_0\|$$

4) und die a posteriori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L}\|x_n - x_{n-1}\|$$

Zum Banachschen Fixpunktsatz.

Bemerkung: Die beiden Fehlerabschätzungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Beweisideen:
Dass es nur einen einzigen Fixpunkt gibt, sieht man folgendermaßen:
Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^{**} \neq x^*$.
Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L\,\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|$$

Die Konvergenz der Iteration folgt aus der Kontraktionseigenschaft der Abbildung Φ: speziell zeigt man, dass die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge mit Grenzwert x^* ist. Aus der Stetigkeit von Φ folgt dann $x^* = \Phi(x^*)$.

Ein Beispiel zum Banachschen Fixpunktsatz.

Berechne den Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.
Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen,
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$,
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$,
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
Setze $x_0 = 1$. Dann ist $x_1 = e/10\ldots$, und es gilt die Abschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = \frac{L^n}{1-L}(1 - e/10) = L^n$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq 11.$$