Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x + e^{x-1} + \cos(1-x) - 2\,.$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

c) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $]-1,1[$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Es sei T_2 das Taylor-Polynom aus Teil a). Zeigen Sie, dass für den Restterm R_2 folgende Abschätzung gilt:

$$|\,R_2(x)\,| \;=\; |\,f(x) - T_2(x)\,| \;\leq\; 10^{-3} \qquad \forall\, x \in [0.9,\, 1.1]\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) Ableitungen und Werte in $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + e^{x-1} + \cos(1-x) - 2\,, & f(1) &= 1-2+1+1-2 = -1,\\ f'(x) &= 2x - 2 + e^{x-1} + \sin(1-x)\,, & f'(1) &= 2-2+1-0 = 1,\\ f''(x) &= 2 + e^{x-1} - \cos(1-x)\,, & f''(1) &= 2. \end{aligned}$$

Also: $\qquad T_2(x) \;=\; -1 \;+\; (x-1) \;+\; (x-1)^2\,.$

b) $f''(x) = 2 + e^{x-1} - \cos(1-x) \geq 2 + e^{x-1} - 1 \;>\; 1\,.$

Da f'' keine Nullstellen hat, hat f höchstens zwei Nullstellen (Rolle).

Es gilt $f(1) < 0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$

Alternativ z.B.

$f(3) \;=\; 3{+}e^2{+}\cos(-2){-}2 \;\geq\; e^2 \;>\; 0, \qquad f(-1) \;=\; 3{+}e^{-2}{+}\cos(2){-}2 \;\geq\; e^{-2} \;>\; 0,$

Es gibt also (ZWS) mindestens zwei Nullstellen.

Insgesamt folgt, dass f genau zwei Nullstellen hat.

c) Es gilt $\qquad f'(1) = 1 > 0 \qquad$ und
$f'(-1) = -4 + e^{-2} - \sin(-2) < -4 + 1 + 1 < 0\,.$

Es gibt also eine Nullstelle x_1 von f' im Intervall $I :=]-1,1[$. Aus Teil a) ist bekannt, dass f' höchstens eine Nullstelle hat. Also gibt es genau eine Nullstelle von f' und diese liegt im Intervall I.

Es handelt sich um ein Minimum, da f'' überall positiv ist, also f' streng monoton steigt.

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Notwendig für die Existenz eines Extremums in $x^* \in \mathbb{R}$ ist daher: $f'(x^*) = 0$,

f' steigt auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton $\Longrightarrow$ f' hat höchstens eine Nullstelle in ganz $\mathbb{R}$, nämlich das bereits oben nachgewiesene $x_1 \in I$. Außerhalb von I kann es kein Extremum mehr geben.

d) Wegen $f'''(x) = e^{x-1} - \sin(1-x)$ gilt mit einem $\theta \in [0.9,\, 1.1]$

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left| \frac{f'''(\theta)}{3!} \cdot |x-1|^3 \right| \leq \frac{|-\sin(1-\theta) + e^{\theta-1}|}{6} \cdot |0.1|^3 \\ &\leq \frac{1+e^{0.1}}{6} \cdot 10^{-3} \leq \frac{1+e^{1}}{6} \cdot 10^{-3} < 10^{-3}. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Bearbeitung: vom 27.01 bis 31.01