Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 7 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 3x^3 + 2x^2 + ax + b & x > 0 \,. \end{cases}$$

Dabei seien a und b reelle Parameter.

(i) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

(ii) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0, 1] \\ A \sin(\omega x) & x \in (1, 2] \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0, 2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) stetig differenzierbar ist.

Lösung:

a)

$$f(x) := \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 3x^3 + 2x^2 + ax + b & x > 0 \,. \end{cases}$$

Wegen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Polynomen und der Exponentialfunktion ist f sicher überall in $\mathbb{R}$ außer in Null beliebig oft stetig differenzierbar.[**1 Punkt**]

Wegen

$$\lim_{x \to 0} \exp(x) = \exp\left(\lim_{x \to 0} x\right) = e^0 = 1$$

und

$$\lim_{x \to 0} 3x^3 + 2x^2 + ax + b = b$$

ist f für $b = 1$ und beliebiges a auch in Null stetig.[**2 Punkte**]

Für $x > 0$ gilt $f'(x) = 9x^2 + 4x + a$.

Für $x < 0$ gilt $f'(x) = e^x$.

Andererseits

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 9x^2 + 4x + a = a$$
$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = 1\,.$$

Also ist f für $a = b = 1$ stetig differenzierbar in $x_0 = 0$.[**2 Punkte**]

b)

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0,1] \\ A\sin(\omega x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

f ist sicher in (0,1) und (1,2) differenzierbar (elementare Funktionen)

Zu untersuchen bleibt der Punkt : $x = 1$ [**1 Punkt**]

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \omega - 1 + 2 - \omega = 1, \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = A\sin(\omega)$$

$$\lim_{x \to 1-} f'(x) = 2\omega - 2 + 2 - \omega = \omega, \qquad \lim_{x \to 1+} f'(x) = \omega A\cos(\omega)$$

Ist f in x_0 stetig differenzierbar, so gilt

$$(\,A\sin(\omega) = 1 \,\wedge\, \omega A\cos(\omega) \,= \omega) \implies \omega = k\pi + \pi/4$$

Für A folgt dann

$$A\sin(\omega) = 1 \implies A(-1)^k/\sqrt{2} = 1 \implies A = (-1)^k\sqrt{2}$$

Wegen $\omega \in [0,2]$ kommt nur $k = 0$ in Frage. Also hat man

$$f(x) := \begin{cases} (\frac{\pi}{4} - 1)x^2 + (2 - \frac{\pi}{4})x & x \in [0,1] \\ \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}x) & x \in (1,2] \end{cases} \qquad [\textbf{4 Punkte}]$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$$
\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_1(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x), \\
f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_2(x) = 2\cos(x)\sin(x), \\
f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} & f_3(x) = \dfrac{2}{(1-x)^n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest}, \\
f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_4(x) = \dfrac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest}, \\
f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & f_5(x) = \sqrt[x]{x}.
\end{array}
$$

Lösung:

- $f_1'(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))' \;=\; 2\cos(x) \cdot (\cos(x))' - 2\sin(x) \cdot (\sin(x))' \;=\; -4\sin(x)\cos(x).$
  Hinweis: $f_1(x) = \cos(2x)$ und $f_1'(x) = -2\sin(2x)$.

- $$\begin{aligned} f_2'(x) &= (2\cos(x)\sin(x))' \;=\; 2\cos(x) \cdot (\sin(x))' + 2(\cos(x))' \cdot \sin(x) \\ &= \; 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)). \end{aligned}$$
  Hinweis: $f_2(x) = \sin(2x)$ und $f_2'(x) = 2\cos(2x)$.

- $$\begin{aligned} f_3'(x) &= \left(\frac{2}{(1-x)^n}\right)' \;=\; (2(1-x)^{-n})' \;=\; 2(-n)(1-x)^{(-n-1)}(-1) \;=\; 2n(1-x)^{-(n+1)} \\ &= \; \frac{2n}{(1-x)^{n+1}}. \end{aligned}$$
  Hinweis: Bitte keine Quotientenregel sondern Kettenregel benutzen. Die Aufgabe dient auch der Übung von Potenzrechenregeln!

- $f_4'(x) = \left(\dfrac{x^n}{e^x}\right)' = \dfrac{nx^{n-1}e^x - x^n e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{nx^{n-1} - x^n}{e^x}.$
  Hinweis: Auch hier geht es ohne Quotientenregel:
  $$f_4'(x) = (x^n \cdot e^{-x})' = nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (nx^{n-1} - x^n)) \;=\; \frac{nx^{n-1} - x^n}{e^x}.$$

- $f_5'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left((e^{\ln x})^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{x}}\right) \cdot \left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right).$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hospital

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x^3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln(1 + x^2)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $a_n := \sqrt[n]{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Lösung:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cosh x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sinh x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cosh x}{6} = -\dfrac{1}{6}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln(1 + x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}\,2x}{2x} = 1$

iii) Für $x \in \mathbb{R}$ rechnet man

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}$$

und mit l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}\right) = e^0 = 1\,.$$

Damit folgt insbesondere auch mit $n \in \mathbb{N}: \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$

Aufgabe 4: (Klausur 2014)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+3}$.

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

c) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{500}$$

gilt.

Lösung:

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$$

$$f'(x) = \frac{4x+6-4x+2}{(2x+3)^2} = 8(2x+3)^{-2} \qquad \text{Quotientenregel: 1 Punkt}$$

a) $$f''(x) = 8(-2)(2)(2x+3)^{-3}$$

$$= -32(2x+3)^{-3} \qquad \text{hoffentlich Kettenregel und nicht Quotientenregel: 1 Punkt}$$

$$f'''(x) = -32(-3)(2)(2x+3)^{-4} = 32 \cdot 6 \cdot \frac{1}{(2x+3)^4} \qquad \text{1 Punkt}$$

b) $f(1) = \dfrac{1}{5}, \qquad f'(1) = \dfrac{8}{25}, \qquad f''(1) = -\dfrac{32}{125}$.

$$T_2(x) = \frac{1}{5} + \frac{8}{25}(x-1) - \frac{16}{125} \cdot (x-1)^2 . \qquad \text{(2 Punkte)}$$

c) Mit einem $\xi \in [\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|R_2(x)| &= \frac{1}{3!} \cdot |f'''(\xi)| \cdot |x-1|^3 && \text{Zwischenstelle und } x_0 = 1 \text{ beachten: 1 Punkt} \\
&\leq \frac{1}{3!} \cdot \frac{32 \cdot 6}{(2\xi+3)^4} \cdot |x-1|^3 \\
&\leq \frac{32}{(2 \cdot \frac{3}{4} + 3)^4} \cdot |x-1|^3 && \text{richtige Zwischenstelle: 1 Punkt} \\
&\leq \frac{32}{(\frac{3}{2} + 3)^4} \cdot |\frac{5}{4} - 1|^3 && \text{3/4 bzw. 5/4 für } x \text{ einsetzen: 1 Punkt} \\
&\leq \frac{32}{(\frac{9}{2})^4} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{32 \cdot 2^4}{9^4 \cdot 4^3} && \text{Rechnung: 1 Punkt} \\
&= \frac{2 \cdot 2^4}{81 \cdot 81 \cdot 4} = \frac{8}{81 \cdot 81} < \frac{8}{80 \cdot 81} \\
&= \frac{1}{810} < \frac{1}{500}\,. && \text{Nachweis der Schranke: 1 Punkt}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \;=\; \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)\,.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Extrema von f. **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Lösung:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0 \implies \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1\,.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty \implies \lim_{x\to 1} f(x) = \infty\,.$

d) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.

e) Da die Exponentialfunktion streng monoton steigt, genügt es das Monotonieverhalten von $h(x) := \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ zu untersuchen.

$$h'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}\exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)$$

Die einzige Nullstelle der Ableitung liegt für $x_0 = 0$ vor.

f kann das Monotonieverhalten nur in x_0 und/oder an der Definitionslücke ändern.

Es gilt:

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}\begin{cases} < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0] & \implies f \text{ fällt streng monoton in }]-\infty, 0[\\ > 0 \quad \forall\, x \in]0,1[& \implies f \text{ wächst streng monoton in }]0,1[\\ < 0 \quad \forall x \in]1,\infty[& \implies f \text{ fällt streng monoton in }]1,\infty[\end{cases}$$

Alternativ: Es gilt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 & \\ & \Longrightarrow f \text{ fällt streng monoton in }]-\infty, 0[\\ f(0) = e^{-1} < 1 & \\ & \Longrightarrow f \text{ steigt streng monoton in }]0,1[\\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty & \\ & \Longrightarrow f \text{ fällt streng monoton in }]1,\infty[\\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 & \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass in $x_0 = 0$ ein Minimum vorliegt.

Zur Klassifikation des Extremums kann man natürlich auch die zweite Ableitung von h berechnen.

$$h''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-2x)}{(x-1)^6}, \qquad h''(0) = 2.$$

Da $h'(0) = 0$ und $h''(0) > 0$ ist, liegt in $x_0 = 0$ ein Minimum vor.

Eine Berechnung von f'' wäre auf jeden Fall zu viel des Aufwands.

f) $f(0) = e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$ Da f auf [0,1[stetig ist, nimmt f alle Werte aus $[e^{-1}, \infty[$ an. Es gilt

$$f(D) = [e^{-1}, \infty[$$

g) Bemerkung: wenn man nicht aufpasst ergibt sich als Bild annähernd eine waagerechte Linie und eine senkrechte Linie bei $x = 1$.

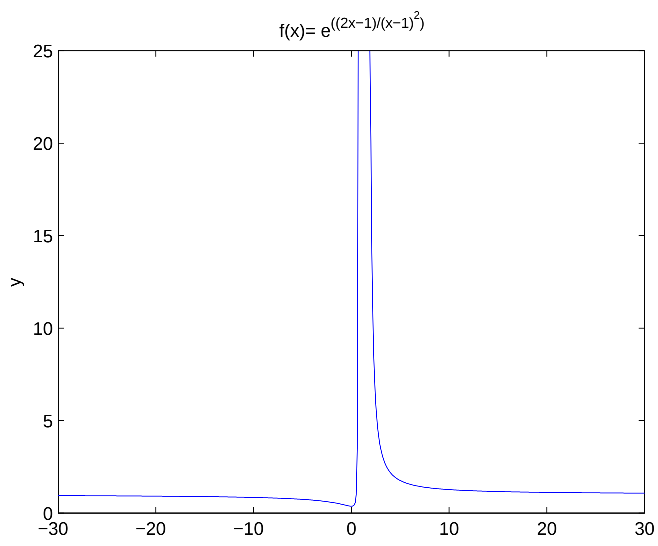

Abbildung 1: Skizze