Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. P. Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Aufgabe 2b-c, Blatt 6 Präsenzaufgaben

Aufgabe 2:

a)

b) Begründen Sie , warum jede

(i) stetige gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 2, \qquad f(-2) = -2, \qquad f(1) = \;1$$

mindestens vier Nullstellen hat und

(ii) jede stetige ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 2, \qquad f(-2) = 2, \qquad f(1) = \;1$$

mindestens fünf Nullstellen hat.

c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \; x^2 + e^x + \cos(x) - 3$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $I := [0, 2]$ mindestens eine Nullstelle hat.

Lösung zur Aufgabe 2:

a)

b) (i) Wegen der Achsensymmetrie bzgl. der $y-$ Achse gilt für eine gerade Funktion $f(-2) = -2 \Longrightarrow f(2) = 2.$
Und damit erhalten wir
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;=\; 2, \wedge f(2) \;=\; -2 \qquad \Longrightarrow f$ hat mindestens ein Vorzeichenwechsel im Intervall $(2, \infty)$.
und
$f(1) \;=\; 1 \;\wedge\; f(2) \;=\; -2, \qquad \Longrightarrow f$ hat mindestens ein Vorzeichenwechsel im Intervall $[1, 2]$.
Da f stetig ist, hat f also mindestens zwei Nullstellen in $[1, \infty)$. Wegen der Symmetrie hat f dann auch mindestens zwei Nullstellen in $(-\infty, -1]$. Also hat f **mindestens** vier Nullstellen in $\mathbb{R}$.

(ii) Wegen der Punktsymmetrie bzgl. des Ursprungs gilt für eine ungerade Funktion $f(-2) = 2 \Longrightarrow f(2) = -2.$
Und damit erhalten wir

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \wedge f(2) = -2 \qquad \Longrightarrow f$ hat mindestens ein Vorzeichenwechsel im Intervall $(2, \infty)$.

$f(1) = 1, \wedge f(2) = -2 \qquad \Longrightarrow f$ hat mindestens ein Vorzeichenwechsel im Intervall $[1, 2]$.

Da f stetig ist, hat f also mindestens zwei Nullstellen in $[1, \infty)$. Wegen der Symmetrie hat f dann auch mindestens zwei Nullstellen in $(-\infty, -1]$. Da f ungerade ist, muss außerdem $f(0) = 0$ gelten, womit f also mindestens fünf Nullstellen haben muss.

c) Es gilt $f(0) < 0$ und $f(2) = 4 + e^2 + \cos(2) - 3 \geq e^2 > 0$.

Da f als Summe elementarer Funktionen stetig ist, gibt es nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle zwischen Null und Zwei.