Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k+3}{k}\right)^k$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{3^k}$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2-k+1}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3\sqrt{k}}$.

Lösung: (Je 2 Punkte)

a) Mit $a_k := \dfrac{5^k}{(k+1)!}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^{k+1}}{(k+2)!} \cdot \frac{(k+1)!}{5^k} = \frac{5}{k+2}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+2} = 0.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

b) Es gilt $2^k \cdot \left(\frac{k+3}{k}\right)^k > 2^k$. Das notwendige Kriterium für Konvergenz $(\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0)$ ist verletzt.

Alternativ: $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\dfrac{2^k(k+3)^k}{k^k}} = \dfrac{2(k+3)}{k} = 2 \cdot \frac{k+3}{k}$

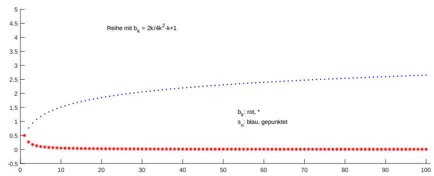
und damit $\sqrt[k]{|a_k|} > 2 > 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Die Reihe divergiert nach dem Wurzelkriterium.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{3^k}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn

$$|a_k| \le \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - k + 1}$ ist divergent; denn wegen $\displaystyle\frac{2k}{4k^2 - (k-1)} \geq \frac{1}{2k}$ hätte man im Falle der Konvergenz der Reihe eine Majorante für die harmonische Reihe.



e) Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriteium:

$$0 < a_k < \frac{2k}{k^3\sqrt{k}} = \frac{2}{k^2\sqrt{k}} \leq \frac{2}{k^2}\,.$$

Aufgabe 2: (3+3+2+2 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob man den Parameter a so wählen kann, dass die Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & : \ x > 1\,, \\ 1 + a(x+1) & : \ x \leq 1\,. \end{cases}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{für } x \leq -1, \\ Ax + B & \text{für } x \in (-1, 4], \\ \ln(x^2 - 3x - 4) - \ln(x - 4) & \text{für } x > 4. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^3 - 1} & \text{für } \ x \in (-\infty, 1)\,, \\ (x-1)^2 + C & \text{für } \ x \in [1, \infty)\,. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} D \cdot x^2 - 5\sin(\frac{\pi}{6}x) & \text{für } \ x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 3\,, \\ e^{(\frac{x}{3})^2 - 1} + Kx, & \text{für } \ x \in \mathbb{R},\ |x| > 3\,. \end{cases}$$

Wie müssen die Zahlen A, B, C, D und K aus $\mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktionen f, g und h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig werden.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2)

a)

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & : \ x > 1\,, \\ 1 + a(x+1) & : \ x \leq 1\,. \end{cases}$$

Es gilt einerseits $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1} \ = \ 0$

und andererseits $\displaystyle\left|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \ \leq \ 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$

Es folgt

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \ \leq \ \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| \ = \ 0$$

Mit der Wahl $a = -\frac{1}{2}$ wird die Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) **Zu f:** Die Funktion ist in allen Punkten außer -1 und 4 stetig.

Es gilt

$\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \cos(-\pi) = -1$

und

$\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = -A + B\,.$

Damit die Funktion in -1 stetig wird, muss also

$$-1 = B - A$$

gelten.

Damit die Funktion im Punkt $x = 4$ stetig wird, muss

$\lim\limits_{x\to 4_-} f(x) = 4A + B = \lim\limits_{x\to 4_+} f(x)$

gelten. Für alle $x > 4$ gilt: $\ln(x^2-3x-4)-\ln(x-4) = \ln\left(\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}\right) = \ln(x+1)\,.$

Wir fordern also $4A + B = \ln(5)$ und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -A + B &= -1, \\ 4A + B &= \ln(5) \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow 5A = \ln(5) + 1 \qquad \wedge \qquad B = -1 + A$

mit der Lösung $A = \dfrac{\ln(5)+1}{5}$, $B = \dfrac{\ln(5)-4}{5}$.

Zu g: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x-6}{x^3-1} & \text{für } x < 1\,, \\ (x-1)^2 + C & \text{für } x \geq 1\,. \end{cases}$

Damit g stetig in $x = 1$ und damit stetig auf ganz $\mathbb{R}$ wird, fordern wir

$$\lim_{x\to 1_+} g(x) = g(1) = C = \lim_{x\to 1_-} \frac{x^2+5x-6}{x^3-1}$$

$$= \lim_{x\to 1_-} \frac{(x+6)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1_-} \frac{x+6}{x^2+x+1} = \frac{7}{3}\,.$$

Zu h:

$$h(x) = \begin{cases} D\cdot x^2 - 5\sin(\frac{\pi}{6}x) & \text{für } |x| \leq 3\,, \\ e^{(\frac{x}{3})^2-1} + Kx & \text{für } |x| > 3\,. \end{cases}$$

Hier muss man fordern:

$\lim\limits_{x\to -3_-} h(x) = \lim\limits_{x\to -3_+} h(x) \qquad$ und $\qquad \lim\limits_{x\to +3_-} h(x) == \lim\limits_{x\to +3_+} h(x).$

Also

$9D - 5\sin(-\frac{\pi}{2}) = 9D + 5 \overset{!}{=} e^{(\frac{-3}{3})^2-1} - 3K = e^0 - 3K = 1 - 3K$

und

$9D - 5\sin(\frac{\pi}{2}) = 9D - 5 \overset{!}{=} e^{(\frac{3}{3})^2-1} + 3K = e^0 + 3K = 1 + 3K\,.$

Also

$$\begin{cases} 9D + 5 = 1 - 3K \\ 9D - 5 = 1 + 3K \end{cases} \iff 18D = 2 \wedge -10 = 6K \iff D = \tfrac{1}{9} \wedge K = -\tfrac{5}{3}\,.$$

Abgabe: vom 13.01 bis 17.01