**Aufgabe 2:** (Je 2 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k-1}}{5^{k-1}}$.

b) Gegeben ist die geometrische Folge $a_k := \left(\frac{r+5}{4}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$, mit einem Parameter $r \in \mathbb{R}$.

- [ ] Die Folge divergiert für alle $r > 0$.
- [ ] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $|r| < 1$ gilt.
- [ ] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-9, -1]$ gilt.
- [ ] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-4, 4]$ gilt.
- [ ] Die Reihe $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-9, -1[$ gilt.

c) Wie viele verschiedene Häufungspunkte hat die Folge $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{n}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$?

**Lösungshinweise zur Aufgabe 2:**

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k-1}}{5^{k-1}} = 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{5^k} = \frac{2}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{35}{6}$$

b)

- [x] Die Folge divergiert für alle $r > 0$.
- [ ] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $|r| < 1$ gilt.
- [x] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-9, -1]$ gilt.
- [ ] Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-4, 4]$ gilt.
- [x] Die Reihe $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn $r \in ]-9, -1[$ gilt.

c) Die Folge $\hat{a}_n = \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2+\frac{3}{n}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$. Da $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ periodisch die Werte $1, 0, -1, 0$ annimmt, gibt es die drei Häufungspunkte $-\frac{1}{2}$, $0$, $\frac{1}{2}$.

**Bearbeitung:** vom 16.12 bis 20.12