Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5 Hausaufgaben

Aufgabe 1:(Rekursive Folgen/Induktion) (je 9 Punkte)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1),$$
$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4b_n - 1},$$

Lösung:

a) Falls die Folge $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$ konvergiert, dann gegen $a \in \mathbb{R}$ mit

$$a = \frac{1}{4}(a+1) \iff a = \frac{1}{3}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Um die Konvergenz der Folge zu zeigen, beweisen wir:

Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch $\frac{1}{3}$.

Beweis über vollständige Induktion:

1. Monotonie:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $a_{n+1} = a_2 = \frac{1}{4}(a_1+1) = \frac{1}{2} < a_1 = a_n$. **(1 Punkt)**

Induktionsannahme : Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gelte $a_{N+1} < a_N$. **(1 Punkt)**

Induktionsschritt : Dann gilt auch $a_{N+2} < a_{N+1}$

Beweis: **(2 Punkte)**

$a_{N+1} < a_N \iff a_{N+1} + 1 < a_N + 1 \iff \frac{1}{4}(a_{N+1} + 1) < \frac{1}{4}(a_N + 1) \iff a_{N+2} < a_{N+1}$

2.Beschränktheit:

Es gilt offensichtlich $1 = a_1 > \frac{1}{3}$. **(1 Punkt)**

Induktionsannahme : Für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gelte $\frac{1}{3} < a_N$. **(1 Punkt)**

Induktionsschritt : Dann gilt auch $\frac{1}{3} < a_{N+1}$

Beweis: **(2 Punkte)**

$a_{N+1} = \frac{1}{4}(a_N + 1) > \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\,.$

Also fällt die Folge monoton und ist nach unten durch 1/3 beschränkt. Damit konvergiert die Folge gegen $\frac{1}{3}\,.$

b) Vorüberlegung: Wenn die Folge $b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4b_n - 1}$ konvergiert, dann gegen ein b mit $b = \frac{1}{2}\sqrt{4b-1}\,.$

Wenn die Folgeglieder überhaupt alle in $\mathbb{R}$ definiert sind, dann gilt $b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ und wir können wie folgt rechnen:

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{4b-1} \iff b^2 = \frac{1}{4}(4b-1) \qquad \text{(alles nichtnegativ!)}$$
$$\iff 4b^2 - 4b + 1 = 0 \iff (2b-1)^2 = 0,$$

d.h. wenn die Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann gegen $b = 1/2\,.$ **(1 Punkt)**

Behauptung: Die Folge ist nach unten beschränkt durch $\frac{1}{2}\,.$

Beweis über vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\frac{1}{2} < b_1 = 1.$ **(1 Punkt)**

Induktionsannahme: Für ein festes, beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gelte $\frac{1}{2} < b_N$ **(1 Punkt)**

Induktionsschritt: **(2 Punkte)**

Zu zeigen ist: $\frac{1}{2} < b_{N+1}\,.$

Beweis: Nach Rekursionsvorschrift gilt $b_{N+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4b_N - 1}\,.$ Also

$b_{N+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4b_N - 1} > \frac{1}{2}\sqrt{2-1} = \frac{1}{2}\;\;.$

Damit ist die folge in $\mathbb{R}$ wohldefiniert, denn $\forall n \in \mathbb{N}:\ 4b_n - 1 > 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 > 0\,.$

Behauptung: Die Folge ist monoton fallend.

Beweis über vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $b_{n+1} = b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} < 1 = b_1.$ **(1 Punkt)**

Induktionsannahme: Für ein festes, beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gelte $b_{N+1} < b_N.$ **(1 Punkt)**

Induktionsschritt:**(2 Punkte)**Dann gilt auch $b_{N+2} < b_{N+1}\,.$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $b_{N+1} < b_N$, also

$4b_{N+1} < 4b_N \iff 4b_{N+1} - 1 < 4b_N - 1$

Da auf beiden Seiten der Ungleichung positive Größen stehen, darf die Wurzel gezogen werden. Es gilt also

$$\sqrt{4b_{N+1}-1} < \sqrt{4b_N - 1} \iff \tfrac{1}{2}\sqrt{4b_{N+1}-1} < \tfrac{1}{2}\sqrt{4b_N - 1} \iff b_{N+2} < b_{N+1}\,.$$

Die Folge also nach unten beschränkt und monoton fallend, also konvergiert sie. Die Eingangsüberlegungen zeigen, dass eine Konvergenz nur gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}$ möglich ist. Die Folge konvergiert also gegen $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2: (Leibniz) (5+2+2 Punkte)

Gegeben ist die Reihe

$$s_1 = 0,\ s_n := \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \, \frac{k+2}{k(k-1)},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.

b) Sei s der Grenzwert der Reihe. Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Wert von s an.

c) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so dass der Abbruchfehler $|s_n - s|$ kleiner als 0.01 wird.

Lösung:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+2}{k(k-1)}\,,$

Mit $a_k := \dfrac{k+2}{k(k-1)}$ gilt wegen $k, k-1, k+2 > 0, \forall k \geq 2$ offensichtlich $a_k > 0$. **(1 Punkt)**

Außerdem gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{k^2\left(\frac{k}{k^2} + \frac{2}{k^2}\right)}{k^2\left(\frac{k(k-1)}{k^2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} + \dfrac{2}{k^2}}{1 - \frac{1}{k}} = 0\,, \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

und es ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{k(k-1)}{k+2} = \frac{k^2+2k-3}{k^2+3k+2} < 1, \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

d,h,, dass die Folge der a_k streng monoton fällt.

(Alternative zum letzten Schritt:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2) - (k-1)(k+3)}{k(k+1)(k-1)} = \frac{k+5}{k(k+1)(k-1)} > 0)$$

Die Folge der a_k ist also positiv, und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent. **(1 Punkt)**

b) **(2 Punkte)**

Es gilt

$$s \leq s_2 = (-1)^2 \frac{2+2}{2(2-1)} = 2$$

und

$$s \geq s_3 = s_2 + (-1)^3 \frac{3+2}{3(3-1)} = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6} .$$

c) **(2 Punkte)**

Wegen $|s_n - s| \leq a_{n+1} = \dfrac{n+3}{(n+1)n}$ und $n+3 < 2n$, $\forall n \geq 4$, also

$a_{n+1} = \dfrac{n+3}{(n+1)n} < \dfrac{2n}{(n+1)n} = \dfrac{2}{n+1}$,

gilt zum Beispiel für $n = 199$

$|s_{199} - s| \leq a_{200} < \dfrac{2}{200} = \dfrac{1}{100}$.

Abgabe: vom 16.12 bis 20.12