**Aufgabe 2:**

a) Bitte Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an und geben Sie die zugehörigen Werte an. Es sei $M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 1 + \frac{3}{n} \right\}$.

| | | |
|---|---|---|
| ☐ | Dann ist $\inf M = \min M$ | $=$ |
| ☐ | Dann ist $\sup M = \max M$ | $=$ |
| ☐ | $\min M$ existiert nicht und es ist $\inf M$ | $=$ |
| ☐ | $\max M$ existiert nicht und es ist $\sup M$ | $=$ |

b) Zeigen Sie, dass das Bild von $\mathbb{N}$ unter der Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

nach unten durch 0.5 und nach oben durch 1 beschränkt ist.

**Lösungsskizze zur Aufgabe 2:**

a) Es sei $M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 1 + \frac{3}{n} \right\}$.

| | | |
|---|---|---|
| ☐ | Dann ist $\inf M = \min M$ | $=$ |
| x | Dann ist $\sup M = \max M$ | $= \ 4$ |
| x | $\min M$ existiert nicht und es ist $\inf M$ | $= \ 1$ |
| ☐ | $\max M$ existiert nicht und es ist $\sup M$ | $=$ |

Erläuterung für die Studierenden: Für die Bilder erhält man
$4,\ 1 + \frac{3}{3},\ 1 + \frac{3}{3},\ 1 + \frac{3}{4},\ \ldots,\ 1 + \frac{3}{100},\ \ldots,\ 1 + \frac{3}{1000}, \ldots.$
Das Maximum, also auch das Supremum ergibt sich sofort aus:
$0 < m < n \Longrightarrow \frac{3}{m} > \frac{3}{n}$.
Die Bilder werden immer kleiner und nähern sich immer mehr der 1. Die Eins selbst wird nie erreicht, aber für jedes $\epsilon > 0$ gilt für alle $n > \frac{6}{\epsilon} \in \mathbb{N}$

$$1 + \tfrac{3}{n} < 1 + \frac{3}{\frac{6}{\epsilon}} = 1 + \tfrac{\epsilon}{2} < 1 + \epsilon.$$

Eins ist also die größte untere Schranke für die Elemente von $M$.

b)

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq n \cdot \frac{1}{n+1} < 1$$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{n+n} = 0.5$$