Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4 Hausaufgaben

Aufgabe 1: (1+1+2+3+3 Punkte)

Bestimmen sie die Lösungen folgender Gleichungen bzw. Ungleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{|x+2|}{|x-6|} = 1,$ b) $\dfrac{|x-3|}{|x-5|} < 1,$ c) $|3x-2| = |6-5x|,$

d) $|3x-2| < |6-5x|,$ e) $\dfrac{3x-1}{x-2} \leq 2$.

Lösung:

a) Für $x \neq 6$ gilt:
$\dfrac{|x+2|}{|x-6|} = 1 \iff |x-(-2)| = |x-6| \iff$ Der Abstand von x zu -2 ist gleich dem Abstand von x zu 6. Also $x = 2$.

b) Für $x \neq 5$ gilt:
$\dfrac{|x-3|}{|x-5|} < 1 \iff |x-3| < |x-5| \iff$ Abstand von x zu 3 ist kleiner als der Abstand von x zu 5. Also $x \in (-\infty, 4)$.

c) $|3x-2| = |6-5x|$:

$3x-2 = 6-5x \iff 8x = 8 \iff x = 1$

oder

$3x-2 = -(6-5x) \iff 4 = 2x \iff x = 2$.

Insgesamt also $x \in \{1, 2\}$.

d) $|3x-2| < |6-5x| \iff f(x) := |3x-2| - |6-5x| < 0$.

Nach Teil c) wissen wir, dass $f(x)$ nur in den Punkten $x \in \{1, 2\}$ den Wert 0 annimmt, also das Vorzeichen wechseln kann (Hier nutzen wir Stetigkeit, obwohl der Begriff der Stetigkeit streng genommen noch nicht zur Verfügug steht. Man kann aber sicher annehmen, dass lineare Funktionen und die Tatsache, dass diese keine Sprungstellen haben, aus der Schule bekannt sind).

Wir können nun zum Beispiel wie folgt rechnen:

Vorzeichen von f für ein $x \in (-\infty, 1)$ zum Beispiel $x = 0: \ f(0) = 2 - 6 < 0$.

Vorzeichen von f für ein $x \in (1, 2)$ zum Beispiel
$x = 1.5: \ f(1.5) = |\frac{9}{2} - 2| - |6 - \frac{15}{2}| = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} > 0$.

Vorzeichen von f für ein $x \in (2, \infty)$ zum Beispiel
$x = 4: \ f(4) = 12 - 2 - (-6 + 20) = 10 - 14 < 0$.

Insgesamt also $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.

e) $\dfrac{3x-1}{x-2} \leq 2$.

$x = 2$ ist keine Lösung!

Für $x > 2$ also $x - 2 > 0$ rechnen wir:

$$\frac{3x-1}{x-2} \leq 2 \iff 3x - 1 \leq 2x - 4 \iff x \leq -3$$

im Widerspruch zu $x > 2 > 0$.

Für $x < 2$ also $x - 2 < 0$ rechnen wir:

$$\frac{3x-1}{x-2} \leq 2 \iff 3x - 1 \geq 2x - 4 \iff x \geq -3$$

also $x \in [-3, 2)$.

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)

a) (5 Punkte) Sie modellieren eine physikalische Größe $f(x)$ für $x \in [-0.2,\, 0.2]$ durch $p(x)$. Als Modellierer garantieren Sie Ihrem Auftraggeber, dass für den maximalen absoluten Modellierungsfehler folgende Abschätzung gilt.

$$|A(x)| := |f(x) - p(x)| \leq \left| \frac{x^3 - \frac{1}{2}\,x + \sin(x)}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{10}\right)^2 \right|$$

Der Auftraggeber behauptet, dass ihm das nicht gut genug sei, er könne nur einen maximalen Fehler von 0.05 tolerieren. Was halten Sie von dieser Aussage?

b) (5 Punkte) Zu berechnen sei $\sin(0.2)$. Leider sind sämtliche elektronischen Geräte, die Ihnen bei der Berechnung behilflich sein könnten, ausgefallen. Ein Studierender des dritten Semesters erinnert sich aber, dass nahe Null $\sin(x) \approx x$ gilt. Genauer gilt

$$|\sin(x) - x| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right| .$$

Außerdem kennen Sie das Additionstheorem

$$\sin(2x) = 2\,\sin(x)\cdot\cos(x) .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Informationen, dass die folgenden Schranken für $\sin(0.2)$ gelten

$$0.1985 < \sin(0.2) < 0.2005 .$$

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Der Auftraggeber kann nicht rechnen. Für $x \in [-0.2,\, 0.2]$ gilt, wegen

$$[a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \qquad \text{und} \qquad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

sogar mit der folgenden groben Abschätzung:

$$\begin{aligned} A(x) &\leq \frac{|x^3| + \left|\frac{1}{2}\,x\right| + |\sin(x)|}{|6|} \cdot \left| x - \frac{1}{10} \right|^2 \\ &\leq \frac{0.2^3 + \frac{0.2}{2} + |\sin(0.2)|}{|6|} \cdot \left| \frac{-2}{10} - \frac{1}{10} \right|^2 \leq \frac{\frac{8}{1000} + \frac{1}{10} + 1}{6} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \\ &\leq \frac{\frac{1}{100} + \frac{1}{10} + 1}{6} \cdot \frac{9}{100} < \frac{\frac{12}{10}}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{100} . \end{aligned}$$

b) (4 Punkte) Die untere Schranke folgt direkt aus $|x - \sin(x)| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right|$:

$$|\sin(0.2) - 0.2| \leq \frac{(0.2)^3}{6} = \frac{8}{6} \cdot 10^{-3} < 1.5 \cdot 10^{-3} .$$

Die obere Schranke erhält man z.B. wie folgt

$$|\sin(0.2)| = 2|\sin(0.1)\cos(0.1)| = 2\sin(0.1)\cos(0.1)$$

$$\Longrightarrow \sin(0.2) < 2(0.1 + \frac{0.1^3}{6}) = 0.2 + \frac{0.1^3}{3} < 0.2 + \frac{0.1^3}{2} = 0.2005$$

Abgabe: vom 02.12 bis 06.12