Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3 Präsenzaufgaben

Aufgabe 2: (Rechnen mit Fakultäten und Binomialkoeffizienten)

Beweisen oder widerlegen Sie (zum Beispiel mit Hilfe eines Gegenbeispiels) folgende Aussagen

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $(n+1)! = 2(2n-1) + 7(n-1)(n-2)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gilt mit $f(n) := n! \cdot \binom{n}{2}$:

$$\frac{f(n+1)}{2(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{f(n+1)}{n+1}.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

a) Die Behauptung stimmt für $n = 1, 2, 3$. Aber nicht für $k \geq 3$.

b) Die Behauptung stimmt. Beweis:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(n+1)}{2(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{f(n+1)}{n+1} \\
\iff &\frac{(n+1)!}{2(n+1)} \cdot \binom{n+1}{2} \leq n! \cdot \binom{n}{2} \leq \frac{(n+1)!}{n+1} \cdot \binom{n+1}{2} \\
\iff &\frac{n+1}{2(n+1)} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \leq \frac{n!}{(n-2)!2!} \leq \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \\
\iff &\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-2)!} \leq \frac{n+1}{(n-1)!} \\
\iff &\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1} \leq 1 \leq \frac{n+1}{n-1} \iff \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \leq 2 \leq 2\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Wegen $0 < \dfrac{2}{n-1} \leq \dfrac{2}{3-1} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ sind beide Ungleichungen erfüllt.

Bearbeitung/Abgabe: vom 18.11 bis 22.11