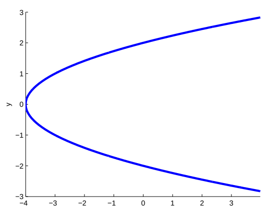
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

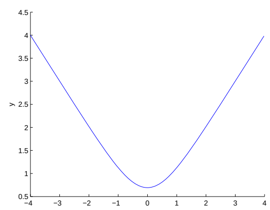
Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

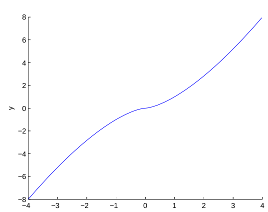
Blatt 3 Hausaufgaben

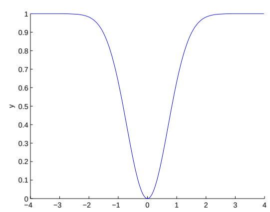
Aufgabe 1: (8 + 4 Punkte)

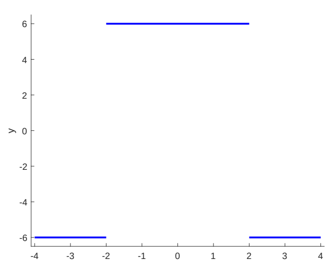
a) Bei welchen der folgenden Bilder kann es sich um die Darstellung des Graphen einer reellwertigen Funktion $f : [-4, 4] \to [-8, 8]$, $x \mapsto y = f(x)$, handeln?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

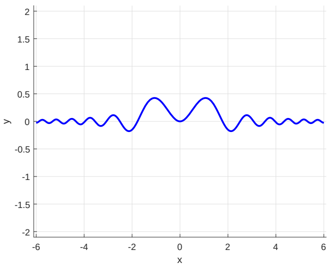
Welche der Funktionen sind - soweit erkennbar - injektiv bzw. surjektiv?
Welche der Funktionen sind - soweit erkennbar - bijektiv (invertierbar/umkehrbar)?

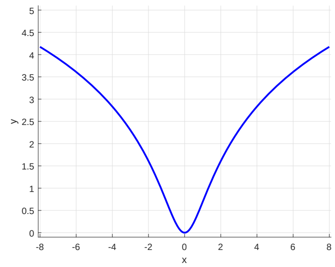
b) In den untenstehenden Bildern sind Abschnitte der Graphen der Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$

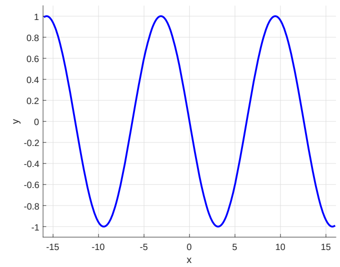
$$f_1(x) = \log(1 + x^2) = \ln(1 + x^2), \qquad f_2(x) = \cos(\tfrac{x+\pi}{2}),$$

und $$f_3(x) = \frac{\sin(x^2)}{1 + x^2}$$

dargestellt. Welches Bild gehört zu welcher Funktion?







Lösung zur Aufgabe 1:

a) Die Abbildung a) stellt nicht den Graphen einer Funktion mit $y = f(x)$ dar, da man z.B. für $x = 0$ zwei verschiedene $y-$ Werte hat.

Die Abbildungen b), c), d) zeigen jeweils einen eindeutigen $y-$ Wert für jedes $x \in [-4, 4]$. Sie stellen also Graphen von Funktionen dar.

Die Abbildung e) stellt genau dann den Graphen einer Funktion dar, wenn in den Punkten $x = \pm 2$ jeweils ein eindeutiger Funktionswert vorgegeben ist. (3 Punkte)

Oben rechts und unten rechts gibt es $y-$ Werte (oben z.B. $y = 2$ und unten z.B. $y = 0.2$), auf die zwei verschiedene $x-$ Werte abgebildet. Die Funktionen sind daher nicht injektiv.

Die Abbildung c) gehört dagegen (so weit erkennbar) zu einer injektiven Funktion.

Die letzte Abbildung gehört offensichtlich nicht zu einer injektiven Funktion. (2 Punkte)

Die Funktionen zu den Abbildungen b), d) und e) nicht surjektiv. Es gibt z.B. kein x mit $f(x) = 5$.

Die Abbildung c) gehört dagegen (so weit erkennbar) zu einer surjektiven Funktion. Zu jedem $y \in [-8, 8]$ gibt es ein $x \in [-4, 4]$ mit $f(x) = y$. (2 Punkte)

Nach den vorangegangenen Überlegungen kann nur die zur Abbildung c) gehörende Funktion eine Inverse haben. (1 Punkt)

b) Alle drei Funktionen haben bei $x = 0$ den Wert $f(0) = 0$.

Alle drei Funktionen sind $y-$ achsensymmetrisch (gerade). Bei der Untersuchung können wir uns also auf den Bereich $x > 0$ beschränken. Hier nimmt die Funktion $g(x) := 1 + x^2$ für größer werdende $x-$ Werte größere Funktionswerte an (Sie ist monoton steigend). Die Logarithmus Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend. Also steigt f_1 im Bereich $x > 0$. Es kommt nur das mittlere Bild in Frage. (2 Punkte)

$f_2(x) = \cos(\frac{x+\pi}{2})$ ist periodisch und gehört damit zum rechten Bild. (1 Punkt)

In $f_3(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + x^2}$ wird die periodische Funktion $\sin(x)$ mit dem Faktor $\dfrac{1}{1 + x^2}$ „gedämpft". Das passt zum linken Bild. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (6 + 4 +8 Punkte)

a) (6 Punkte + 4 Punkte für die Zusatzaufgabe) Eine reellwertige Funktion $f(x)$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt. Die Funktion $f(x)$ heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.

Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche sind ungerade?

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = 2x - 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_4(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f_5 : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f_5(x) = \frac{x \cdot f_2(x)}{f_1(x)}$$

$$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_6(x) = f_2(x)\left(f_1(x)\right)^3 + x^3$$

Zusatzaufgabe: Skizzieren Sie den Graphen von f_2 für $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ und für $x \in [-0.3\,,\,0.3]$. Fällt Ihnen etwas auf?

b) (8 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ausdrücke in $\mathbb{R}$ definiert? Untersuchen Sie für $k = 1, 2, 3, 4$, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f_k(x) = x$ gilt?

i) $f_1(x) = \sqrt{x^2}$ **ii)** $f_2(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$
iii) $f_3(x) = \exp(\ln(x))$ **iv)** $f_4(x) = \ln(\exp(x))$

Lösung zur Aufgabe 2:

a) f_1 ist gerade, denn Summe, Differenz, Produkt und Quotient gerader Funktionen sind gerade.

Genauer: $f_1(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{1+(-x)^2} = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2} = f_1(x)\,.$

$f_2(x)$ ist ungerade, denn Summe und Differenz ungerader Fkt'n sind ungerade. Produkt und Quotient zweier ungerader Fkt'n sind gerade!!

Genauer:
$$\begin{aligned} f_2(-x) &= 2(-x) - 2\sin(-x)\cos(-x) = \;-2x - 2(-\sin(x))\cos(x) \\ &= -\left(2x - 2\sin(x)\cos(x)\right) = -f_2(x) \end{aligned}.$$

$f_3(x)$ ist weder gerade noch ungerade, denn z.B.

$f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $f_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin(0) = 0\,.$

f_4 ist gerade, denn $f_4(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = f_4(x)\,.$

f_5 ist gerade, denn der Zähler ist als Produkt zweier ungerader Funktionen gerade und der Nenner ist gerade. Konkret:

$$f_5(-x) \;=\; \frac{-x\cdot f_2(-x)}{f_1(-x)} \;=\; -\,\frac{x\cdot(-f_2(x))}{f_1(x)} \;=\; \frac{x\cdot(f_2(x))}{f_1(x)} \;=\; f_5(x)\,.$$

f_6 ist ungerade, denn: $\qquad (ungerade)\cdot(gerade) + ungerade = ungerade\,.$

b) (Je 2 Punkte)

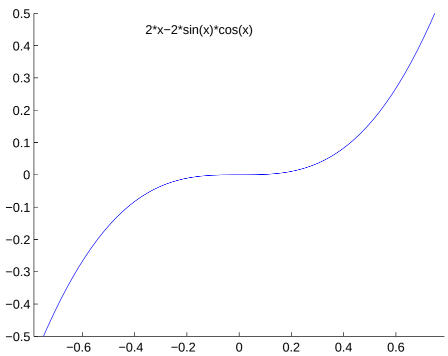
i) $f_1(x) = \sqrt{x^2} \Longrightarrow D = \mathbb{R}\,,$ aber $f_1(x) = x$ nur für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0\,.$

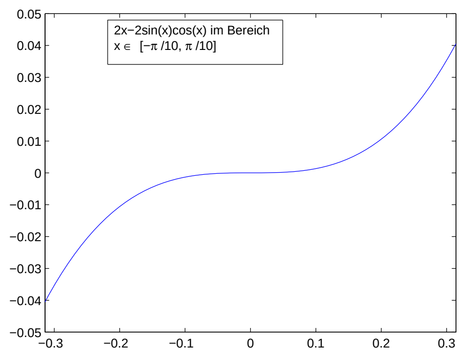
ii) $f_2(x) = (\sqrt{x})^2 \Longrightarrow D_2 = \{x \in \mathbb{R},\, x \geq 0\}, \qquad f_2(x) = x, \quad \forall x \in D_2\,.$

iii) $f_3(x) = \exp(\ln(x)) \Longrightarrow D_3 = \mathbb{R}^+, \qquad f_3(x) = x, \quad \forall x \in D_3\,.$

iv) $f_4(x) = \ln(\exp(x)) \Longrightarrow D_4 = \mathbb{R}, \qquad f_4(x) = x, \quad \forall x \in D_4\,.$

Zusatzaufgabe:





Es könnte auffallen, dass nahe Null $2x$ eine gute Näherung für $\sin(2x)$ ist.

Abgabe: vom 18.11 bis 22.11