Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit folgender Äquivalenzen:

a) $((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

b) $((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Lösung: (Je 5 Punkte)

a) $((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

A	B	C	D $= A \vee B$	$B \vee C$	$F = \neg(B \vee C)$	$D \wedge F$	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0

b) $((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

A	B	C	D $= B \vee C$	$E = A \wedge B$	$F = A \wedge C$	$E \vee F$	$A \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Aufgabe 2:

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Verneinen Sie die Aussage

$$A(x_0) :\Leftrightarrow \; (\exists \epsilon > 0 \; :]x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon[\subseteq \; I\;) \,.$$

Für welche reellen Intervalle I gilt: $\forall x \in I : A(x)$?

b) Beweisen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Zahl $m := 3n(n^2 + 2)$ ist durch 9 teilbar.

(ii) Voraussetzung: Für $i = 0,\, 1,\, 2$ seien die Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}$ ungerade. Das heißt $\exists\, k_i \in \mathbb{Z} :\; a_i = \; 2k_i - 1$ für $i = 0,\, 1,\, 2$.
Behauptung: Dann hat das Polynom

$$p(x) \;:=\; a_2 x^2 \;+\; a_1 x \;+\; a_0$$

keine rationale Nullstelle.

Tipp: Nehmen Sie an, dass das Polynom eine rationale Nullstelle
$x = \frac{m}{n},\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n, m$ teilerfremd
besitzt, und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch. Beachten Sie, dass die Summe dreier ungerader Zahlen nie verschwindet.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}\,.$

Lösung:

a) (3 Punkte) $\qquad \neg A(x_0) :\Leftrightarrow \; (\forall \epsilon > 0 \; :]x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon[\not\subseteq \; I\;) \,.$

Ist das Intervall beschränkt mit den Randpunkten a und b, so kann man für alle $x \in I \setminus \{a, b\}$ mit

$\delta := \min\{|x - a|,\, |x - b|\} \;>\; 0$ z.B. $\epsilon = \delta/2$ wählen.

Für die Randpunkte gibt es kein ϵ mit der geforderten Eigenschaft.

Für offene Intervalle (a, b) gilt also $\forall x \in I : A(x)$.

Analoge Aussagen gelten für unbeschränkte Intervalle.

b) (i) (2 Punkte) Für jede natürliche Zahl n gilt mit einem geeignetem $k \in \mathbb{N}_0$: $n = 3k - 1 \vee n = 3k \vee n = 3k + 1$.

$n = 3k \implies m := 3n(n^2 + 2) = 9k(9k^2 + 2)$ ist durch 9 teilbar.

$n = 3k \pm 1 \implies m := 3(3k \pm 1)(9k^2 \pm 6k + 3) = 9(3k \pm 1)(3k^2 \pm 2k + 1)$ ist durch 9 teilbar.

(ii) (3 Punkte) Voraussetzung: Für $i = 0, 1, 2$ seien die Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}$ ungerade.
Behauptung: Dann hat das Polynom $p(x) := a_2x^2 + a_1x + a_0$ keine rationale Nullstelle.

Beweis: Wegen $a_0 \neq 0$ ist Null keine Nullstelle des Polynoms.

Annahme: $\exists\, x = \frac{m}{n}$ $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilerfremd, mit

$$a_2(\frac{m}{n})^2 + a_1(\frac{m}{n}) + a_0 = 0 \overset{n\neq 0}{\Longleftrightarrow} a_2m^2 + a_1mn + a_0n^2 = 0$$

Da die Summe dreier ungerader Zahlen nicht verschwindet, ist mindestens ein Summand gerade.

$\Longrightarrow$ mindestens eine der Zahlen m oder n ist gerade.

$\Longrightarrow$ Dann ist aber der gemischte Term a_1mn und mindestens ein quadratischer Term (o.E.d.A.) z.B. a_0n^2 gerade.

Die Summe zweier gerader Zahlen und einer ungeraden Zahl kann nicht verschwinden, also muss auch a_2m^2 gerade sein. Damit folgt, dass m gerade ist. Dann sind aber m und n im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.

Die Annahme war also falsch.

(iii) (2 Punkte) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}$.

Die Aussage ist falsch! Sie stimmt für $n = 1, 2, 3$ aber bereits mit $n = 4$ erhält man ein Gegenbeispiel:

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \neq \frac{5 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 4}{2} = \frac{56}{2}\,.$$

Abgabe: vom 04.11 bis 08.11