Fachbereich Mathematik **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Mathematik I
(Modul: Analysis I)
3. März 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AI	BU	BVT	ET	EUT	IN/IIW	LM	MB	MTB/MEC	OS	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: Induktion (6 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}.$$

Lösung:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k(k-1) = 0 = \frac{1^3}{3} - \frac{1}{3}. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Induktionsschritt: zu zeigen $\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{3}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) &= (n+1)(n+1-1) + \sum_{k=1}^{n} k(k-1) && \textbf{Zerlegung (1 Punkt)} \\
&= n(n+1) + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} && \textbf{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung (1 Punkt)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(3n^2 + 3n + n^3 - n\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n - n\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - n\right) = \frac{1}{3} \cdot \left((n+1)^3 - (n+1)\right). \square && \textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Folgen und Reihen (3 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (n+2) - \sqrt{n^2+2}\,.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ auf Konvergenz.

Lösung:

a) Ansatz (3. binomische Formel):

$$\begin{aligned}
a_n =& (n+2) - \sqrt{n^2+2} = \frac{((n+2) - \sqrt{n^2+2})((n+2) + \sqrt{n^2+2})}{(n+2) + \sqrt{n^2+2}} \\
=& \frac{(n+2)^2 - (n^2+2)}{n+2 + \sqrt{n^2+2}} = \frac{n^2+4n+4-n^2-2}{n+2+\sqrt{n^2+2}} && \textbf{(1 Punkt)} \\
=& \frac{4n+2}{n+2+\sqrt{n^2+2}} = \frac{n(4+\frac{2}{n})}{n\left(1+\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}\right)} && \textbf{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1}+1} = 2 \qquad \textbf{(1 Punkt)}.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{\frac{(k+1)^2}{(k+1)!}}{\frac{k^2}{k!}} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^2} = \frac{(k+1)^2}{k+1}\cdot\frac{1}{k^2} \\
&= \frac{k+1}{k^2} \le \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k} \le \frac{2}{3}, \qquad \forall\, k \ge 3. && \textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

Alternativ zur letzten Zeile:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2} = 0\,.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotienten Kriterium. **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: Extrema (5 Punkte)

Gegeben ist die stetige Funktion $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^3 - 3x + 2\,, & : \quad \text{für } x \in [-2,0)\,, \\ 2 + \frac{x}{2} & : \quad \text{für } x \in [0,2]\,. \end{cases}$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen und alle globalen Extrema der Funktion f

Lösung:

$$f'(x) := \begin{cases} 3x^2 - 3\,, & : \quad \text{für } x \in (-2,0)\,, \\ \frac{1}{2} & : \quad \text{für } x \in (0,2)\,. \end{cases} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

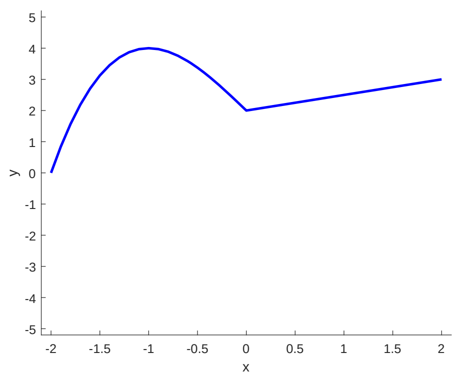
Die einzige Nullstelle von f' liegt für $x = -1$ vor. **(1 Punkt)**

Zu prüfen sind zusätzlich die Randpunkte des Intervalls und Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist, hier also $x = 0$. **(1 Punkt)**

Man erhält:

x	-2	$\in (-2,-1)$	-1	$\in (-1,0)$	0	$\in (0,2)$	2
$f'(x)$	–	positiv	0	negativ	–	positiv	–
$f(x)$	0 globales Minimum	steigt	4 globales Maximum	fällt	2 lokales Minimum	steigt	3 lokales Maximum

(2 Punkte)



Aufgabe 4: Taylor/ Produktregel/Kettenregel (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f:\ D := \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \;=\; (x+1)\cdot e^{2x}\,.$$

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 \;=\; 0\,.$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} f(x) \;=\; f(x) \;=\; (x+1)\cdot e^{2x} & f(0) \;=\; 1 & \\ f'(x) \;=\; e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} \;=\; e^{2x}(2x+3) & f'(0) \;=\; 3 & \textbf{(2 Punkte)} \\ f''(x) \;=\; 2e^{2x} + 2(2x+3)e^{2x} & f''(0) \;=\; 8 & \end{array}$$

$$T_2(x) = \; 1 + 3(x-0) + \frac{8}{2}(x-0)^2 \; = 1 + 3x + 4x^2. \qquad [\textbf{1 Punkt}].$$