Fachbereich Mathematik **SoSe 2020**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Mathematik I
(Modul: Analysis I)
4. September 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:

AI	BU	BVT	ET	EUT	IN/IIW	LM	MB	MTB/MEC	OS	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(8k-3) \;=\; 4n^2 + n\,.$$

Lösung:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung wahr, denn es gilt

$$\sum_{k=1}^{1}(8k-3) \;=\; 5 \;=\; 4 \cdot 1^2 \,+\, 1. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gelte

$$\sum_{k=1}^{n}(8k-3) \;=\; 4n^2 + n\,.$$

Induktionsschritt: zu zeigen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(8k-3) \;=\; 4(n+1)^2 + n + 1 = 4n^2 + 9n + 5\,.$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(8k-3) \;&=\; 8(n+1) - 3 + \sum_{k=1}^{n}(8k-3) \qquad && \textbf{Zerlegung}\\
&=\; 8n + 5 +\, 4n^2 + n && \textbf{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung}\\
&=\; 4n^2 + 9n + 5\,.\square && \textbf{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Gegeben ist die Reihe

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \frac{k+1}{(k+2)\,(k+3)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.

b) Sei s der Grenzwert der Reihe. Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Wert von s an.

Lösung:

a) Mit $a_k := \dfrac{k+1}{(k+2)\,(k+3)}$ gilt wegen $k+1, k+2, k+3 > 0$ offensichtlich $a_k > 0$.

Außerdem gilt $\quad \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k+1}{k^2 + 5k + 6} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{5}{k} + \frac{6}{k^2}} = 0$

und es ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+2}{(k+3)\,(k+4)} \cdot \frac{(k+2)(k+3)}{k+1}$$
$$= \frac{(k+2)^2}{(k+4)(k+1)} = \frac{k^2+4k+4}{k^2+5k+4} < 1,$$

da $0 <$ Zähler $<$ Nenner.

Alternativ

$$a_k - a_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4) - (k+2)^2}{(k+2)\,(k+3)\,(k+4)} = \frac{k^2+5k+4-(k^2+4k+4)}{(k+2)\,(k+3)\,(k+4)}$$
$$= \frac{k}{(k+2)\,(k+3)\,(k+4)} > 0$$

denn Zähler und Nenner sind für alle $k \in \mathbb{N}$ positiv.

Die Folge der a_k ist also positiv und streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent.

b) Als obere bzw. untere Schranke kann man z. B. s_0 bzw. s_1 wählen:

$s_0 = a_0 = \frac{1}{6}$.

$a_1 = \dfrac{1+1}{(1+2)\cdot(1+3)} = \dfrac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

$$s_1 = s_0 - a_1 = 0 < \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+1}{(k+2)\,(k+3)} < s_0 = a_0 = \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 4 - 2(x-\pi)^2 - 3\cos(x)$ genau zwei reelle Nullstellen hat.

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - 2(x-\pi)^2 - 3\cos(x), \\ f'(x) &= -4(x-\pi) + 3\sin(x)\,, \\ f''(x) &= -4 + 3\cos(x) \leq -1\,. \end{aligned}$$

Da f'' keine Nullstellen hat, hat f höchstens zwei Nullstellen (Rolle).
(2 Punkte)

Es gilt

$f(0) = 4 - 2\pi^2 - 3 = 1 - 2\pi^2 < 0\,,$

$f(\pi) = 4 - 3\cos(\pi) = 4 + 3 = 7 > 0,$

$f(2\pi) = 4 - 2\pi^2 - 3\cos(2\pi) = 1 - 2\pi^2 < 0\,,.$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens eine Nullstelle im Intervall $]0, \pi[$ und mindestens eine Nullstelle im Intervall $]\pi, 2\pi[$.

Insgesamt folgt, dass f genau zwei Nullstellen hat. **[2 Punkte]**

Aufgabe 4: (7 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-1) \cdot \ln(x)$.

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(ii) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = [1, \frac{3}{2}]$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{10}$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)}$.

Lösung:

a) (i)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1) \cdot \ln(x), && f(1) = 0, \\
f'(x) &= \ln(x) + \frac{x-1}{x} = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}, && f'(1) = 0 \\
f''(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, && f''(1) = 2. \\
T_2(x) &= 0 + 0 + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 = (x-1)^2. && \textbf{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

(ii) $f'''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$.
Mit einem $\xi \in [1, \frac{3}{2}]$ gilt:

$$\begin{aligned}
|R_2(x)| &= \frac{1}{3!} \cdot |f'''(\xi)| \cdot |x-1|^3 \leq \frac{1}{3!} \cdot \left| -\frac{1}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^3} \right| \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot \left(\left| \frac{1}{\xi^2} \right| + \left| \frac{2}{\xi^3} \right| \right) \cdot \frac{1}{8} \leq \frac{1}{6 \cdot 8} \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{2}{1^3} \right) \\
&= \frac{3}{6 \cdot 8} = \frac{1}{16}. \qquad \textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = -\frac{1}{2}. \qquad \textbf{(2 Punkte)}
\end{aligned}$$