Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ 3x^3 + 2x^2 + ax + b & x > 0\,. \end{cases}$$

Dabei seien a und b reelle Parameter.

(i) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

(ii) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0,1] \\ A\sin(\omega x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0,2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$,

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_2(x) = 2\cos(x)\sin(x)$,

$f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ $\quad f_3(x) = \dfrac{2}{(1-x)^n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest,

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_4(x) = \dfrac{x^n}{e^x}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest,

$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad f_5(x) = \sqrt[x]{x}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hospital

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x^3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln(1+x^2)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $a_n := \sqrt[n]{n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Aufgabe 4: (Klausur 2014)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) \;=\; \dfrac{2x-1}{2x+3}\,.$

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

c) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \;\leq\; \frac{1}{500}$$

gilt.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \;=\; \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)\,.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Extrema von f. **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.