Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2019/2020
Dr. Hanna Peywand Kiani

# Hörsaalübung zu Blatt 7 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Rolle, Extrema, Taylor
## 20/21.01.2020

**Differenzierbarkeit:** $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in** $x_0 \in D^0$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{existiert.}$$

Im Falle der Existenz heißt der Grenzwert

**Ableitung/Differentialquotient** von $f$ in $x_0$.

Schreibweise: $\boxed{f'(x_0),\ \frac{d}{dx} f(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0)}$

$f$ Differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in $x_0$

$f'(x_0) > 0 \iff f$ steigt in $x_0$

$f'(x_0) < 0 \iff f$ fällt in $x_0$

$f'$ stetig und Minimum/Maximum in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$.

Wobei: $f$ hat ein

**Globales Maximum** in $x_0 \in D \iff f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in D$.

strenges globales Maximum: $f(x_0) > f(x), \qquad \forall x \in D$

**Lokales Maximum** in $x_0 \in D \iff f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0 - \epsilon]$

mit einem $\epsilon > 0$.

Analoge Definitionen für Minima

Extrema: Sammelbegriff für Minima und Maxima

Stationäre Punkte: $f'(x) = 0$.

Einige Differentiationsregeln:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Homogenität:} & (\alpha f)'(x_0) = & \alpha f'(x_0) \\
\text{Summenregel:} & (f+g)'(x_0) = & f'(x_0) + g'(x_0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Produktregel:} & (f \cdot g)'(x_0) = & f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0) \\
\text{Quotientenregel:} & (\frac{f}{g})'(x_0) = & \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} \\
\text{Kettenregel:} & f(g(x))' = & f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\text{Umkehrfunktion:} & \left(f^{-1}(y)\right)' = & \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}
\end{array}
$$

**In der Klausur dürfen nur die folgenden Ableitungen elementarer Funktionen Bbenutzt werden . Alle anderen Ableitungen müssen mit Hilfe der oben angegebenen Regeln berechnet werden!**

$$
\begin{aligned}
(x^p)' &= px^{p-1} && \forall p \in \mathbb{Q} \\
(\sin(x))' &= \cos(x), && \\
(\cos(x))' &= -\sin(x), && \\
(\exp(x))' &= (e^x)' = \exp(x) = e^x, && \\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x} && \forall x \in \mathbb{R}^+ \\
(\tan(x))' &= \frac{1}{\cos^2(x)} && \forall x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

**Beispiel 1:**

Gegeben ist die Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 3 + 2x\,, & : \quad \text{für } x \in [-1, 0)\,, \\ 3\,(x-1)^2\,, & : \quad \text{für } x \in [0, \frac{3}{2}]\,, \\ 1 - \frac{x}{6}\,, & : \quad \text{für } x \in [\frac{3}{2}, 2]\,. \end{cases}$$

Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen und alle globalen Extrema der Funktion $f$

**Lösung:**

$$f'(x) := \begin{cases} & : \quad \text{für } x \in (-1, 0)\,, \\ & : \quad \text{für } x \in (0, \frac{3}{2}) \\ & : \quad \text{für } x \in (\cancel{0}_{\frac{3}{2}}, 2)\,. \end{cases}$$

Nullstelle(n) von $f'$:

Zu prüfen sind zusätzlich die Randpunkte des Intervalls und Punkte, in denen $f$ nicht differenzierbar ist, hier also

**Beispiel 2:** Bestimmen Sie die Parameter $a$ und $b$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} (1+a)e^{(x-1)} & : \ x \leq 1\,, \\ \cos(x^2-1) - \ b & : \ x > 1 \end{cases}$$

stetig differenzierbar wird.

Zweite Ableitung: $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$

n-te Ableitung: $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$

# Nullstellensatz / Rolle

### Nullstellensatz

Ist $f$ stetig auf [a,b] und $f(a) \cdot f(b) < 0$,

so gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$.

### Rolle

Ist $f$ stetig auf [a,b], differenzierbar in (a,b)

und $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$

mit $f'(x_0) = 0$.

Speziell für $f(a) = f(b) = 0$:

**Zwischen zwei Nullstellen der Funktion liegt mindestens eine Nullstelle der Ableitung!**

Also:

- wenn $f$ zwei Nullstellen hat, dann hat $f'$ mindestens eine Nullstelle
- wenn $f$ drei Nullstellen hat, dann hat $f'$ mindestens zwei Nullstellen
- wenn $f$ (n+1) Nullstellen hat, dann hat $f'$ mindestens n Nullstellen

  und $f''$ hat mindestens $n-1$ Nullstellen

  und $f'''$ hat mindestens $n-2$ Nullstellen

  $\vdots$

  und $f^{(n)}$ hat mindestens $n-(n-1)=1$ Nullstelle

Umgekehrt : hat $f'$ keine Nullstelle in (a,b), so hat $f$ höchstens eine Nullstelle in [a,b].

**Rolle rückwärts :)**

Hat $f'$ höchstens $n$ Nullstellen in (a,b), so hat $f$ höchstens $n+1$ Nullstellen in [a,b].

Hat $f^{(n)}$ keine Nullstelle in (a,b), so hat

$f^{(n-1)}$ höchstens eine Nullstelle in (a,b),

$f^{(n-2)}$ höchstens zwei,

$f^{(n-3)}$ höchstens drei, $\cdots$

$f$ höchstens $n$ Nullstellen in [a,b].

**Typische Aufgabe:**

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) := x^3 + 2x - x \cdot e^{x^2}$$

**Lösung:**

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - (1 \cdot e^{x^2} + xe^{x^2}(x^2)')$$

$$f''(x) = 6x - \left[(e^{x^2})'(1 + 2x^2) + e^{x^2}(1 + 2x^2)'\right]$$

$$f''(x) = 2x(3 - e^{x^2}(3 + 2x^2)) = \ 0 \iff \qquad (x = 0)$$

oder $\quad \big(x \neq 0 \quad \wedge \quad 3 - e^{x^2}(3 + 2x^2) = \ 0\big)$

$f''(x)$ hat genau eine (doppelte) Nullstelle.

**Rolle:** $f'$ hat höchstens 2 Nullstellen $\Longrightarrow f$ **höchstens** 3 Nullstellen.

**Suche Vorzeichenwechsel:**

$f(x) = x^3 + 2x - xe^{x^2} \implies f(0) = 0$

$f(1) = 3 - e > 0$

$f(2) = 8 + 4 - 2e^4 = 12 - 2e^4 < 12 - 2 \cdot 2^4 = -20 < 0$

Zwischenwertsatz: es gibt mindestens eine Nullstelle in [1,2]

Symmetrie: $f$ ist ungerade $\Longrightarrow$ es gibt es mindestens eine Nullstelle in [-2,-1].

Alternativ: $f(-1) = -3 + e^1 < 0$

$f(-2) = -8 - 4 + 2e^4 > -12 + 2 \cdot 2^4 = 20 > 0$

Insgesamt: mindestens drei Nullstellen.

# Taylorreihen/-polynome

Probleme in den Anwendungen :

oft hohe Dimension, meist nichtpolynomial

$\Longrightarrow$ meist schwer /unmöglich exakt lösbar

- FRAGE: Kann man das Problem zumindest **lokal** hinreichend gut durch ein polynomiales Model beschreiben?

- WOZU? Bei Polynomen meist einfacher : Nullstellen, Verlauf, Ableitungen, Integrale etc.

- WAS IST GUT? Im Mittel? Maximale Abweichung im vorgegebenem Bereich? Fläche zwischen Funktionsgraphen minimal? Oder $\cdots$

HIER : möglichst gut in einem Punkt $x_0$

GENAUER: zu $f$ und einem festen Punkt suchen wir ein Polynom $p$ , für das

$$f(x_0) = p(x_0)\,, \quad f'(x_0) = p'(x_0)\,, \quad f''(x_0) = p''(x_0)$$
$$\cdots\ f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

mit möglichst hohem $n$ gilt.

0-ter Versuch : Polynom nullten grades : $p_0(x) = a_0 \quad a_0 = f(x_0)$

Weitere Forderungen : i.A. nicht erfüllbar!

Soll nicht nur der Funktionswert sondern auch die Steigung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$$p_1(x) := a_0 + a_1(x - x_0) \implies p_1'(x) = a_1 = f'(x_0)$$

Also

$$\boxed{p_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$p_1$ stimmt in $x_0$ mit $f$ in Funktionwert und Steigung überein

Nächste Forderung $f''(x_0) = p''(x_0)$ i.A. mit linearen Polynomen nicht erfüllbar!

Sollen nicht nur der Funktionswert und Steigung sondern auch die zweite Ableitung stimmen, braucht man noch einen Parameter

$$p_2(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

Muss jetzt etwa $a_2 = f''(x_0)$ gelten? Probieren Sie es!

Für

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

gilt

$$p_n^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

Soll

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

gelten, so muss gelten:

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$$

## Taylorsche Formel mit Lagrangescher Restgliedformel

$f : I \to \mathbb{R}$ sei (n+1) Mal stetig differenzierbar auf einem Intervall $I$. Dann gilt

$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.

Wobei $T_n$ = **Taylorpolynom** n-ten Grades zu $f$ mit **Entwicklungspunkt** $x_0 \in I$:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

und $R_n(x)$ = **Restglied** $\boxed{R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\psi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$

wobei die (i.d.R. unbekannte) **Zwischenstelle** $\psi$ zwischen $x$ und $x_0$ liegt.

$$T(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1}_{T_1} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{T_2} + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}_{T_3}$$

$$R_1(x) = \frac{f''(\psi)}{2!}(x-x_0)^2 \qquad R_2(x) = \frac{f'''(\psi)}{3!}(x-x_0)^3$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\psi)}{4!}(x-x_0)^4$$

$\psi$ zwischen $x$ und $x_0$

## Beispiel ) Klausur 07/08, Hinze/Kiani (3+4 Punkte)

i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2$ zur Funktion

$$f(x) = \cos(x)\, e^x$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

ii) Seien $f$, $x_0$ und $T_2$ wie Teil a) i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.1$$

die Abschätzung

$$|\, R_2\,(x; x_0)\,| \;:=\; |\, f(x) \,-\, T_2\,(x; x_0)\,| \;\leq 0.005$$

gilt.

**Lösung:** $T_2(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$

i)

$f(x) = \cos(x)\, e^x$ $\qquad$ $f(0) = 1$

$f'(x) =$ $\qquad$ $f'(0) =$

$f''(x) =$ $\qquad$ $f''(0) =$

$T_2(x; 0) =$

ii) $f'''(x) =$

$$| R_2 (x; x_0) | = \left| \frac{f'''(\theta)}{3!} (x - x_0)^3 \right| = \frac{|f'''(\theta)|}{3!} |(x-0)^3|$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine Schranke für den Betrag der 3. Ableitung von $f$ für $|x| \leq 0.1,\ x_0 = 0$ und $\theta$ zwischen $x$ und $x_0$, also $|\theta| \leq 0.1$.

$$\begin{aligned}
|f'''(\theta)| &= \left| -2(\sin(\theta) + \cos(\theta)) e^{\theta} \right| = \\
&\leq \\
&\leq \\
&\leq \\
&\leq \\
&\leq
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
|\, R_2\,(x;x_0)\,| \;&=\; \left|\, \frac{f'''(\theta)}{3!}(x-x_0)^3 \right| \;=\; \frac{|f'''(\theta)|}{3!}\,|(x-0)^3| \;\leq \\
&\leq \\
&\leq \\
&\leq \\
&<\; 0.005
\end{aligned}
$$

**Eventuell zweites Beipiel:**

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x;0)$ von

$$f\ :\ (-1,1)\ \to\ \mathbb{R}^+,\quad f(x)\ :=\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass der absolute Abbruchfehler $|T_3(x;0)-f(x)|$ auf dem Intervall $[-0.2, 0.3]$ nach oben durch 0.02 beschränkt ist.

**Lösung:** $T_3(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}, & f(0) &= 1, \\
f'(x) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}, & f'(0) &= \tfrac{-1}{2}, \\
f''(x) &= \left(\tfrac{-1}{2}\right)\left(\tfrac{-3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}, & f''(0) &= \tfrac{3}{4}, \\
f'''(x) &= \left(\tfrac{-1}{2}\right)\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(\tfrac{-5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{7}{2}}, & f'''(0) &= -\tfrac{15}{8}, \\
f^{(4)}(x) &= \left(\tfrac{-1}{2}\right)\left(\tfrac{-3}{2}\right)\left(\tfrac{-5}{2}\right)\left(\tfrac{-7}{2}\right)(1+x)^{-\frac{9}{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3(x;0) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\
&= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3
\end{aligned}
$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{-7}{2}\right)(1+x)^{-\frac{9}{2}}$$

$x \in [-0.2, 0.3]$, $x_0 = 0$ .

$$|R_3(x;0)| = \left|\frac{(x-0)^4}{4!} f^{(4)}(\theta)\right|$$ mit $\theta$ zwischen $x$ und $x_0$

$$\begin{aligned}
|R_3(x;0)| &= \frac{|x-0|^4}{|4!|} \left|\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{-7}{2}\right)(1+\theta)^{-\frac{9}{2}}\right| \\
&\leq \frac{0.3^4}{4!} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4} \cdot (1+\theta)^{-\frac{9}{2}} \qquad \theta \in [-0.2, 0.3] \\
&= \frac{3^4}{10^4} \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^{\frac{9}{2}}}
\end{aligned}$$

Weiter abschätzen:

$$
\begin{aligned}
|R_3(x;0)| &\le \frac{81\cdot 5\cdot 7}{10^4\cdot 2\cdot 4\cdot 16}\cdot\frac{1}{(1-0.2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{81\cdot 35}{10^4\cdot 8\cdot 16}\cdot\frac{1}{(\frac{8}{10})^{\frac{9}{2}}} \\
&\le \frac{81\cdot 35}{128}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\left(\frac{10}{8}\right)^{4.5} < \frac{81}{128}\cdot\frac{35}{10^4}\cdot\left(\frac{10}{8}\right)^{5} \\
&< 1\cdot\frac{35}{10^4}\cdot\frac{10^5}{8^5} = \frac{350}{64\cdot 64\cdot 8} < \frac{360}{60\cdot 60\cdot 8} \\
&= \frac{1}{80} = \frac{2}{160} < \frac{2}{100}\,.
\end{aligned}
$$

# Klausur: Sporthalle Hamburg

# Es gibt keine Saaluhr!

## Sprechstunden:

`https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/klausuren/klausur_sprechstunden_2019w.pdf`

`https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/contact/sprechstunden-ferien.html`

# Topthemen der letzten Klausuren: (Unsere Aufgaben dazu)

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.
Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

**Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.**

- **Induktion:** (Aufgabe 1, Blatt P3, Aufgabe 1, H5)

- **Folgen:** (Aufgabe 1, Blatt P5 und H5)
  $''\infty - \infty''$ (Dritte Binomische-Formel)
  rational in $n$

- **Reihen:**
  Geometrische Reihe berechnen (Aufgabe 2, Blatt P5)
  alternierende Reihe (Leibniz) (Aufgabe 2 Blatt H5)
  notwendiges Kriterium $a_n \to 0$ (Aufgabe 1, Blatt P6)
  Quotienten-/Wurzelkriterium (Aufgabe 1, Blatt P6 und H6)

- **Stetigkeit/Differenzierbarkeit**
  (Aufgaben 2, P6+H6, Aufgabe 1, P7)

- **ZWS/Rolle:**
  (Aufgabe 2, Blatt P6 + P7)

- **Extrema:**
  (Aufgaben 1 + 2, Blatt P7, Aufgabe 5, H7)

- **Taylor:**
  Taylor mit Fehlerabschätzung, (Aufgabe 2, Blatt P7, Aufgabe 4, Blatt H7)

- **Kurvendiskussion:** nur die durch die Übungen abgedeckten Teile ( Aufgabe 1+2, P7, Aufgabe 5, Blatt H7)

Blätter 1+2+4: Eher Werkzeuge/Vokabeln