Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2019/2020
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 6 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reihen 2.Teil,
Stetigkeit
06/07.01.2020

Zur Erinnerung Gegeben sei eine Zahlenfolge a_0, a_1, a_2, $\cdots$. Definiere für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser **Partialsummen** wird **(unendliche) Reihe** genannt.

Man sagt die Reihe **konvergiert**, genau dann, wenn die Folge s_n konvergiert. Im falle der Konvergenz, heißt

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \textbf{Grenzwert der Reihe}$$

BEISPIEL 1: Geometrische Reihe

$(a_k := q^k)$ konvergiert **genau dann**, wenn $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, |q| < 1$$

Leibniz-Kriterium: (siehe letzte HÜ)

Eine **alternierende Reihe**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \qquad a_k \geq 0$$

$$\text{mit} \qquad a_k \text{ monoton fallend,} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

konvergiert. Es gilt die Einschließung:

$$s_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

sowie die folgende Schranke für den Abbruchfehler

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

AB HIER NEU: Gegben sei die Reihe $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

$$\boxed{\textbf{Notwendige Bedingung für Konvergenz:} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.}$$

Anschaulich klar, Beweis: Cauchy-Kriterium für Folgen.

Reicht das?

BEISPIEL 2: HARMONISCHE REIHE $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert,

obwohl $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$

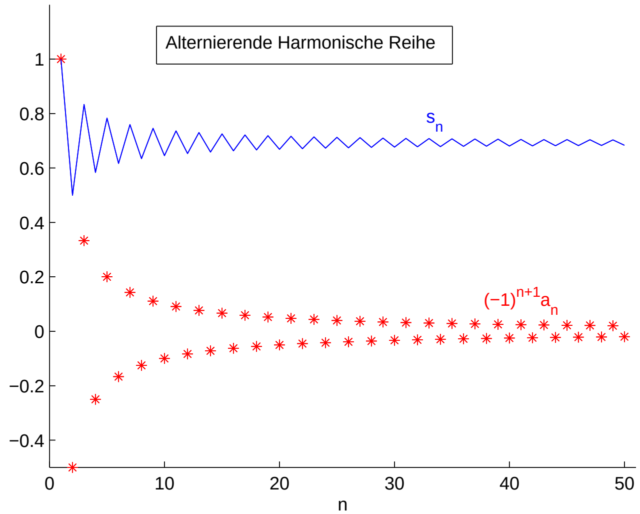
MERKE: $a_k \to 0$ reicht also nicht! Die a_k müssen schnell genug gegen Null gehen!

Vorlesung: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad \text{konvergiert für alle } r \geq 2.}$

k	1	2	3	4	$\cdots$	10
$a_k = \frac{1}{k}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{10}$
$\hat{a}_k = \frac{1}{k^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$	$\frac{1}{100}$

BEISPIEL 3: Alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.



Definition: Die Reihe $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Kriterien für absolute Konvergenz.

I) Majoranten/Minoranten-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent und } \quad |a_k| \leq b_k\,,\ \forall k \geq k_0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \textbf{absolut konvergent}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ divergent und } \quad 0 \leq b_k \leq a_k\,,\ \forall k \geq k_0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Minorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

häufig Majoranten	benutzte Minoranten
$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \lvert q\rvert < 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad q > 1$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad r > 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

BEISPIEL 4: $$s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+10}$$

Für große k : $$a_k = \frac{k^2}{k^3+10} \approx \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$$

Vermutung: Divergenz! Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine Minorante für s?

$$\frac{k^2}{k^3+10} = \frac{1}{k+\frac{10}{k^2}} < \frac{1}{k}$$

Fazit : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ kann nicht direkt als Minorante verwendet werden.

Strategie:

Zum Beispiel:

$$\frac{k^2}{k^3+10} \geq$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{divergent} \implies \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{11k} \qquad \text{Minorante für } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+10}.$$

BEISPIEL 5: $s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+\sin(k))^2}$

Für große k verhalten sich die Summanden $a_k = \frac{1}{(3k+\sin(k))^2}$ fast wie:

Vermutung : Konvergenz, Majorante: Vielfaches von $\sum \frac{1}{k^2}$?

$$(3k+\sin(k))^2 \geq (3k-1)^2 \geq (3k-k))^2 \geq (2k)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(3k+\sin(k))^2} \leq \frac{1}{4k^2}$$

$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k+\sin(k))^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} \overset{\text{Majo.}}{\Longrightarrow}$ Konvergenz von s_n

Als Folgerung aus dem Mojorantenkriterium, erhält man (mit der geometrischen Reihe als Majorante):

II) Quotientenkriterium

Version A) $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ für k groß genug $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ konvergent

$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k$ absolut konvergent.

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q > 1$ für k groß genug $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k$ divergent.

Version B)

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Longrightarrow \text{Divergenz} \\ = 1 & \Longrightarrow \text{????? keine Aussage} \end{cases}$$

III) Wurzelkriterium

Version A)

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \qquad \text{für } k \text{ groß genug} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ konvergent.}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq q > 1 \qquad \text{für } k \text{ groß genug} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ divergent.}$$

Version B)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \text{ absolute Konvergenz} \\ > 1 & \Longrightarrow \text{ Divergenz} \\ = 1 & \Longrightarrow \text{ ????? keine Aussage} \end{cases}$$

Faustregel : Quotienten– bzw. Wurzelkriterium oft (nicht immer!) bei Fakultäten und Exponentialfunktionen hilfreich! Nicht anwendbar, wenn die a_k nur polynomial fallen!

BEISPIEL 6: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k-1}}$

Alternative i) geometrische Reihe liefert nicht nur eine Aussage über Konvergenz, sondern auch den Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k-1}} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{5^{k-1}} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

$$= 2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{m} = 2 \, \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$$

Alternative ii) Quotientenkriterium für $a_k = \dfrac{2^k}{5^{k-1}}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\dfrac{2^{k+1}}{5^{k+1-1}}}{\dfrac{2^k}{5^{k-1}}} = \frac{2^{k+1}}{5^k} \cdot \frac{5^{k-1}}{2^k} = \frac{2}{5}$$

$\dfrac{2}{5} =: q < 1 \quad \Longrightarrow \quad$ absolute konvergent.

Alternative iii) Wurzelkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{5^{k-1}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{5 \cdot \frac{2^k}{5^k}} =$$

BEISPIEL 7: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^5}$$

konvergiert nach dem Majorantenkriterium. Majorante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Keine Chance mit Quotienten– bzw. Wurzelkriterium : Ausdrücke wachsen/fallen polynomial!

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\dfrac{(k+1-1)}{(k+1)^5}}{\dfrac{k-1}{k^5}} = \frac{k}{(k+1)^5} \cdot \frac{k^5}{k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| =$$

Auswahl eines geeigneten Kriteriums:

- Finde die "bestimmenden Terme"; zum Beispiel die betragsmäßig am schnellsten wachsenden Terme aus Zähler und Nenner.

- Unterscheide

  A) a_k geht polynomial gegen Null, wie $\frac{1}{k^r}$, $r > 1$

  Beispiel: $\frac{k - k^3}{k^4 + k^6} \approx$ O$\left(\frac{1}{}\right)$

  B) a_k geht exponentiell gegen Null.

  Beispiele: q^k, $|q| < 1$ $\frac{1}{k!}$, 2^{-k}

  C) a_k geht höchstens wie $\frac{1}{k}$ gegen Null.

  Beispiele: $\frac{1}{\ln(k)}$, $\frac{1}{\ln(k) + 2k}$, $\frac{(-1)^k}{k}$

a_k geht gegen Null wie	exponentiell $q^k,\ \lvert q\rvert < 1, \frac{1}{k!}$	polynomial $\frac{1}{k^r} \quad r > 1$	höchstens wie $\dfrac{1}{k}$
Beispiele	$a_k = \dfrac{2^k}{5^{k-1}}$ $a_k = ke^{-k^2}$ $a_k = \dfrac{k^4}{k!}$	$a_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k^4+1}}$ $a_k = \dfrac{(-k)^k}{e^k \cdot k!}$ $a_k = (3k + \sin(k))^{-2}$	$a_k = \dfrac{k^2}{k^3+1}$ $a_k = \dfrac{1}{\ln(k) + \sqrt{k}}$
passende Kriterien	Wurzel- und Quotientenkriterium $evtl.$ Majorante $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k,\ \lvert q\rvert < 1$	Evtl. Majorante $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^{-m}, m > 1$ $oder$ Leibniz	evtl. Leibniz für Konvergenz $bzw.$ Minorante $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^{-1}$

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$

Der Term e^{-k^2} ist der bestimmende Term und geht exponentiell gegen Null. Wir versuchen es mit dem Quotientenkriterium.

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{e^{(k+1)^2}} \cdot \frac{e^{k^2}}{k} = \frac{e^{k^2}}{e^{(k+1)^2}} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{e^{k^2}}{e^{k^2+2k+1}} \cdot \frac{k+1}{k}$$

$$= \frac{e^{k^2}}{e^{k^2} \cdot e^{2k+1}} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{1}{e^{2k+1}} \cdot \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{e^{2k+1}} \cdot \frac{k+k}{k}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \frac{1}{e^3} \cdot 2 <$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$ also $a_k = \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$

k steht im Exponenten : Versuch mit Wurzelkriterium Version B

Berechne also $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+3}{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2+\frac{3}{k}}{3+\frac{2}{k}} = \frac{2}{3} = q$$

Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

c) $s_n \; \cancel{d_k} := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - \sqrt{k}}{2k+1}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+1} \right)^k$

Wurzelkriterium Version A

Alternativ: $\left(\frac{k}{3k+1} \right)^k < \left(\frac{1}{3} \right)^k$

Da die geometrische Reihe für $q = \frac{1}{3}$ konvergiert, konvergiert unsere Reihe nach dem Majorantenkriterium.

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen
Definitionen aus der Vorlesung:

Häufungspunkte von $D \subset \mathbb{R}$: sind Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\exists \, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Grenzwerte von Funktionen: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben.
Mann sagt $f(x)$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert c und schreibt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \,,$$

wenn für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt.

Linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) =: \lim_{x\to x_0-} f(x) = c \,.$$

$$\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) =: \lim_{x\to x_0+} f(x) = c \,.$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

also $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(Man kann f durchzeichnen)

f heißt **linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) in D

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Zum Nachweis der Stetigkeit :

– Elementare Funktionen sind in ihren Definitionsbereichen stetig

– Summe, Produkt, Quotient, Kompositionen stetiger Funktionen sind (in ihren Definitionsbereichen) stetig.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
x \mapsto 1\,,\ x \mapsto x^2\,,\ x \mapsto \cos(x) & \text{stetig in } \mathbb{R} \\
\Longrightarrow\ x \mapsto \frac{1}{x^2} & \text{stetig in } \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\Longrightarrow\ x \mapsto \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{stetig in } \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x \mapsto 1\,,\ x \mapsto x\,,\ x \mapsto x^2\,,\ x \mapsto x^3 & \text{stetig in } \mathbb{R} \\
\Longrightarrow\ x \mapsto \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} & \text{stetig in } \mathbb{R} \setminus \{-1\}
\end{array}
$$

Stetige Ergänzung : $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert

Beispiel 1: Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1} & \text{für } x \neq -1 \\ a & \text{für } x_0 = -1 \end{cases}$$

Einzige eventuell problematische Stelle ist $x = -1$.
Überall sonst: als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig.

Was passiert, wenn mann $x = -1$ in $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$ einsetzt?

$$\forall x \neq -1 : \quad f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x+1} =$$

und

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(-1) = 2$$

Beispiel 2: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot \sin(x) & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von $a \in \mathbb{R}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Einzige problematische Stelle : $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \cdot \sin(x)\right) =$$

Beispiel 3: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + \ln(x^2 + x - 2) & \text{für } x > 1 \\ x + a & \text{für } x \leq 1 \end{cases}$$

Oft hilfreich:

- Kürzen im Zähler und Nenner, Polynomdivision : Bsp 1

- Funktionalgleichungen/Additionstheoreme nutzen : z.B.
  $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

- Problematische Terme abschätzen : (vgl. Bsp. 2)

  $f(x) = A(x) \cdot B(x)\,,\ x_0 \in D$ mit

  $|B(x)| \leq K, \forall x \in D$

  Kein Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} B(x)$

  aber $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = 0$

  Dann gilt auch $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) \cdot B(x) = 0$

Für die Präsenzaufgaben:

Zwischenwertsatz

Nullstellensatz

Ist f stetig auf [a,b] und $f(a) \cdot f(b) < 0$,

dann hat f mindestens eine Nullstelle in [a,b].

Zwischenwertsatz

Ist f stetig auf [a,b] und o.B.d.A. $f(a) < c < f(b)$,

so gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.