Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2019/2020

Hörsaalübung zu Blatt 5 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Folgen,
Reihen 1.Teil
09/10.12.2019

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$:

Reelle Zahlenfolge : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,, \qquad n \mapsto f(n) := a_n.$

Schreib- bzw. Sprechweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall n \geq N$$

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

ACHTUNG: $\pm\infty$ sind keine Zahlen aus $\mathbb{R}$.

$a_n \to \pm\infty \quad (n \to \infty)$: uneigentliche Konvergenz

divergent = nicht konvergent

Rechenregeln/bekannte Folgen :

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **seien konvergent** mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) **Linearität** :

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \qquad b_n \neq 0$$

c) Seien $a_n \geq 0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{a}$$

d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Für stetige Funktionen f (insbesondere für die elementaren Funktionen $\sin$, $\cos$, $\ln$, $\exp$, $\cdots$) gilt in ihren Definitionsbereichen
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

e) Monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folgen sind konvergent.

monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Eine Folge heißt nach **oben (unten) beschränkt**, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C \;\; (a_n \geq C)$.

f) Die geometrische Folge $a_n = q^n$ konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$.

Die geometrische Folge $a_n = q^n$ konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$.

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } q \leq -1 \cdot \end{cases}$$

g) $$\lim_{n \to \infty} n^k = \begin{cases} \infty & \text{falls } k > 0 \\ 1 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0 \cdot \end{cases}$$

h) $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p \qquad \forall p \in \mathbb{R}$$

Beispiele: Untersuchung auf Konvergenz und ggf. Grenzwert ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n := \sqrt{n^2+1} - (n+1) \qquad b_n := \tfrac{6n^2+n}{4n-1} - \tfrac{3n^2-2}{2n+1}\,.$$

$$c_n := \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{2n-3}. \qquad d_n := \left(-1 + \frac{3}{2n}\right)^{n}. \qquad e_n := (a_n, c_n)\,,$$

(Ausführliche Besprechung der Beispiele vor Ort.)

Zur Folge $a_n = \sqrt{n^2+1} - (n+1)$

Wie wäre es mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = \infty \qquad \text{(wg. a, b und c)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \qquad \text{(wg. a und b)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \lim_{n\to\infty} (n+1) = 0 \text{ ?}$$

völliger Blödsinn!

Untersuche zum Beispiel: $\dfrac{n-1}{2n},\ \dfrac{n^2+1}{n},\ \dfrac{n}{n^2+1}$

$$\frac{n-1}{2n} =$$

$$\frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2 \cdot \frac{1}{n}}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} =$$

Die Regeln a) b) und c) gelten nur im Falle der Konvergenz der einzelnen beteiligten Folgen gegen endliche Zahlen.

Zurück zum Beispiel: richtig wäre:

Behebe Problem $\infty - \infty$ mittels 3. binomischer Formel $(c-b)(c+b) = c^2 - b^2$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1} - (n+1) \right]$$

$$a_n = \left[\sqrt{n^2+1} - (n+1) \right] = \left[\frac{(\sqrt{n^2+1} - (n+1)) \cdot (\sqrt{n^2+1} + (n+1))}{\sqrt{n^2+1} + (n+1)} \right.$$

$$= \frac{n^2 + 1 - (n+1)^2}{\sqrt{n^2+1} + (n+1)} =$$

$$= \frac{-2n}{\sqrt{n^2+1} + (n+1)}$$

Zur Folge $\quad b_n := \frac{6n^2+n}{4n-1} - \frac{3n^2-2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n}{4n-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{2n+1}$$

(Das wäre Regel a))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{2n+1} \stackrel{?}{=} \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2-2)}{\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)} \right)$$

(Das wäre Regel b))?

Die Rechenregeln a) und b) sind nicht direkt anwendbar!

Rationale Funktion: bei Bedarf z.B. bei $\infty - \infty$ oder ∞/∞ etc. erst gemeinsamer Nenner, dann Zähler- und Nenner durch höchste im Nenner auftretende Potenz von n teilen.

$$b_n = \frac{6n^2+n}{4n-1} - \frac{3n^2-2}{2n+1} =$$

$$= \frac{12n^3+6n^2+2n^2+n-(12n^3-3n^2-8n+2)}{8n^2+2n-1}$$

$$= \frac{11n^2+9n-2}{8n^2+2n-1} =$$

Zur Folge $c_n := \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{2n-3}$. TYP: $\left(a + \frac{b}{n}\right)^{kn+d}$

$$c_n = \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{2n} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{-3}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{n}\right]^{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{-3}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{-3}{2n}\right)^{n}\right]^{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{-3}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{-\frac{3}{2}}{n}\right)^{n}\right]^{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{-3}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^{2} \cdot (1-0)^{-3} = e^{-3}$$

Zur Folge $d_n := \left(-1 + \frac{3}{2n}\right)^n$:

$$\begin{aligned} d_n &= \left(-1 + \frac{3}{2n}\right)^n \\ &= \left((-1) \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)\right)^n \\ &= (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n \end{aligned}$$

Zur Folge $e_n = (a_n, c_n)^T$: komponentenweise betrachten!

Rekursiv definierte Folgen $\quad a_{n+1} = R(n, a_n)$

a_{n+1} wird nicht allein durch n bestimmt, sondern hängt vom Vorgänger (gelegentlich auch von mehreren Vorgängern ab).

Z.B.: $a_0 = 1\,, \qquad a_{n+1} := \dfrac{3+5a_n}{20}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}.$

Aus der Vorlesung:

Jede monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert.

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad (\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$$

Beispiel:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} := \frac{3 + 5a_n}{20}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Falls die Folge konvergiert, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, dann

Kandidat(en) für Grenzwert der Folge:

Es ist $a_0 = 1,\qquad a_1 = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 0.4 \qquad a_2 =$

Vermutung:

1) Behauptung: Die Folge ist nach unten beschränkt durch $\frac{1}{5}$ d.h.:

$Induktionsanfang$: Für $n = 0$ gilt $a_0 \ = \ 1 > \ \frac{1}{5}$.

$Induktionsannahme$: Für ein festes bel. $N \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_N > \ \frac{1}{5}$.

$Induktionsschritt$: Zu zeigen: $a_{N+1} > \ \frac{1}{5}$

Beweis:

$$a_{N+1} \ = \ \frac{3 + 5a_N}{20}$$

2) Behauptung: Die Folge ist monoton fallend also $a_{n+1} \leq a_n$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $a_0 \;=\; 1$ und

$$a_1 = \frac{3 + 5a_0}{20} = \frac{4}{10} < a_0 = 1$$

Ind.annahme: Für ein festes beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gelte $a_N \geq a_{N+1}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen $a_{N+1} \geq a_{N+2}$.

Beweis:

$$a_N \geq a_{N+1} \iff$$

$$\iff$$

Die Folge konvergiert also gegen

Zusammenfassung der Strategie

- Bestimme Kandidaten für Grenzwert von $a_{n+1} := R(n, a_n)$. Setze dazu (noch unbekannten) Grenzwert a auf beiden Seiten der Rekursionsformel ein.

$$\boxed{a_{n+1} := R(n, a_n) \longrightarrow a = R(n, a)\,.}$$

  Die reellen Lösungen dieser Gleichung sind die einzigen Kandidaten für den Grenzwert.

- Weise Beschränktheit und Monotonie (z.B. per vollständiger Induktion) nach.

- Als obere (untere) Schranke bietet sich der größte (kleinste) Kandidat für ein Grenzwert an.

Häufungspunkte:

Definition: Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$1 \le n_1 < n_2 < \cdots , \qquad\qquad n_k \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Dann heißt $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Grenzwerte von Teilfolgen heißen **Häufungspunkte** der ursprünglichen Folge.

Beispiel 1a: $a_n = \ (-1)^n$

Häufungspunkte:

Beispiel 1b:

$a_n = \cos(n\pi)$

Häufungspunkte:

Beispiel 2: $b_n := (1 + \cos(n\pi)) + \frac{1}{n}$.

Beispiel 3: $c_n = \left(1 + \frac{3r+2}{6}\right)^n$

Geometrische Folge mit $q = 1 + \frac{3r+2}{6}$: Fallunterscheidung nach

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } q \le -1\cdot \end{cases}$$

$$-1 < 1 + \frac{3r+2}{6} < 1 \iff$$

$$c_n = \left(1 + \frac{3r+2}{6}\right)^n$$

$$r = -\frac{2}{3}:$$

$$r > -\frac{2}{3}:$$

$$r \leq -\frac{14}{3}:$$

Reihen Definition: Gegeben sei eine Zahlenfolge $a_0,\, a_1,\, a_2,\, \cdots$. Addiert man die Glieder dieser Folge nacheinander auf, so entsteht eine neue Folge:

$$
\begin{aligned}
s_0 &:= a_0 \\
s_1 &:= a_0 + a_1 \\
s_2 &:= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &:= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,.
\end{aligned}
$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser **Partialsummen** wird **(unendliche) Reihe** genannt.

Man sagt die Reihe **konvergiert**, genau dann, wenn die Folge s_n

konvergiert. Im falle der Konvergenz, heißt

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \textbf{Grenzwert der Reihe}$$

Beispiel: Geometrische Reihe $a_k := q^k \, , \ \ , q \neq 1$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, |q| < 1$$

Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

Reihen : spezielle Folgen!

Konvergenzkriterien für Folgen gelten hier genauso!! Es gibt aber noch einige praktische, spezielle Kriterien!!

Notwendige Bedingung: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0.$

Reicht das?

Leibniz-Kriterium:

Eine **alternierende Reihe**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \qquad a_k \geq 0$$

$$\text{mit} \quad a_k \text{ monoton fallend,} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

konvergiert. Es gilt die Einschließung:

$$s_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

sowie die folgende Schranke für den Abbruchfehler

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Veanschaulichung : vor Ort!

Beispiel 4: (Klausur 04, Oberle/Kiani 2003) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}\cdot$$

Mit $a_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ gilt offensichtlich $\boxed{a_k > 0}$

und $0 < a_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} < \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k} \qquad \forall k \geq 1$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} a_k = 0} \quad \text{(Nullfolge)}$$

Zu zeigen: Monotonie

$$a_{k+1} \leq a_k \iff$$

Hier: $a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$, $\qquad a_{k+1} = \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = a_{k+1} \cdot \frac{1}{a_k} = \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)} \cdot \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1}$$

$$a_k - a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}$$

Die Folge der $\boxed{a_k \text{ fällt monoton.}}$

aus den drei Kästen folgt: Die Reihe konvergiert nach Leibniz und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)} < s < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)} .$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1}{8} = a_0 - a_1 \le s \le a_0 = \frac{1}{6} .$$

Zusatz: Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ an, so dass der Abbruchfehler $|s - s_n|$ kleiner als 10^{-3} wird!

$|s - s_n| \le a_{n+1} \le a_n$.

Wobei $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Es reicht zum Beispiel: $n =$