Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2019/2020

Hörsaalübung zu Blatt 4 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Beträge, Ungleichungen, Abschätzungen
Schranken, Infimum, Supremum
Bisektionsverfahren
25/26.11.2019

Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen

Für alle reellen Zahlen x, y und z gilt bekanntlich

$(x = y) \Longleftrightarrow (x + z = y + z)$ und $\overset{z \neq 0}{\Longleftrightarrow} (x \cdot z = y \cdot z)$

Bei Ungleichungen, zum Beispiel $x < y$ gilt

$(x < y) \Longleftrightarrow (x + z < y + z)$ und

$$(x < y) \Longleftrightarrow x \cdot z \qquad \begin{cases} \ldots yz & z \\ \ldots yz & z \\ \ldots yz & z \end{cases}$$

Betrag $x = |x| =$ Abstand von x zu Null.

$$|x-y| = \text{Abstand von } x \text{ und } y = \begin{cases} x-y & \text{falls } x \geq y, \\ -(x-y) & \text{falls } x < y. \end{cases}$$

Beispiel 1: Geometrische Lösung von:

a) $|x-10| = |x-30|$

b) $x \neq 30 \wedge \dfrac{|x-10|}{|x-30|} \geq 1$

Beispiel 2: Bestimmung von Lösungen (in $\mathbb{R}$)

mit Hilfe von Fallunterscheidung oder

mit Hilfe von $|x| = |y| \iff x^2 = y^2$.

$|6x + 1| = |10x + 5|$

Variante A: Fallunterscheidung

Variante B: $|6x + 1| = |10x + 5| \iff (6x + 1)^2 = (10x + 5)^2$

Und wie sieht die Lösungsmenge von $|6x + 1| > |10x + 5|$ aus?

Beispiel 3: Bestimme Lösungen (in $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{6}\}$) von

$$\frac{10x+5}{6x+1} \geq 3$$

Abschätzungen:

Exakte (Darstellungen von) Lösung A^* oft nicht möglich

Man nutzt Näherung/Approximation A_0

Fehler:

| exakte Lösung - Näherung | $= |A^* - A_0| =: |R(x)|$

nicht exakt bekannt

Gewünscht: obere Schranke für (parameterabhängigen) Fehler.

Nutze $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ und die Dreiecksungleichung $|a| + |b| \geq |a + b|$.

Beispiel A1: Der vom Parameter x abhängige Fehlerterm sei

$$R(x) = x^3 \cdot \frac{-1 - \sqrt{x} - \cos(x)}{1 - x}$$

Der Fehler soll für $\forall\, x \in [0, \frac{1}{4}]$ abgeschätzt werden.

$$|R(x)| = \left| x^3 \cdot \frac{-1 - \sqrt{x} - \cos(x)}{1 - x} \right| \leq$$

Beispiel A2: Sei $f(t)$ eine von t (z.B. Umgebungstemperatur oder Zeit) abhängige Größe, die nur näherungsweise berechnet werden kann. Der Ausdruck

$$R(t) = \left| \frac{(t-t_0)\cos\left(2(t-t_0)\right) - \left((t-t_0)^2+1\right)\sin(t-t_0)}{3!}(t-t_0)^3 \right|$$

sei eine obere Schranke für den Approximationsfehler. Zeigen Sie, dass mit $t_0 = 2$

$$R(t) \;\leq\; 0.002 \qquad \text{für alle } t \in [1.8\,,\, 2.2]$$

gilt.

Zur Aufgabe H2b):

Nutzen Sie: $|a - b| \, < \, |c|$

bedeutet: Abstand von a zur b ist kleiner als $|c|$,

also: $\qquad b - |c| \, < \, a \, < \, b + |c|$

Eine Schranke kann man direkt mit

$$|\sin(x) - x| \, \leq \, \left| \frac{x^3}{6} \right|$$

Zeigen. Für die zweite braucht man dann das Additionstheorem.

Minima, Maxima, Infimum, Supremem: Sei $M \subset \mathbb{R}$.

- **Obere Schranke von** M**:** Jede Zahl $C \in R$ mit $x \leq C, \forall\, x \in M$

- **Untere Schranke von** M**:** Jede Zahl $c \in R$ mit $x \geq c,\ \forall\, x \in\ M$

- M heißt **nach oben (bzw. unten) beschränkt** falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

- **Supremum** von $M = \sup M =$ kleinste obere Schranke von M

- **Infimum** von $M = \inf(M) =$ größte untere Schranke von M.

Beispiele:

$$M_1 := \{\frac{1}{x} : x \in \ [1, 2)\}$$

$$M_2 := \{x^2 : 0 < x \leq 0.5\}$$

$$M_3 := \{x = 3k : k \in \mathbb{N}\}$$

Obere Schranke für M_1:

$\sup M_1 =$ Kleinste obere Schranke $=$

Liegt das Supremum der Menge M in der Menge, so wird es **Maximum von M** genannt. Analog ist das **Minimum von M** definiert.

Untere Schranke für $M_1 := \{\frac{1}{x} : x \in [1, 2)\}$:

$\inf M_1 =$ größte untere Schranke $=$

Minimum von M_1 :

Eine Menge kann also beschränkt sein ohne Minmum und/oder Maximum zu besitzen. Es gilt aber der folgende Satz (vgl. Vorlesung S.62)

SATZ: Jede nichtleere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum(Infimum).

Nun zu $M_2 := \{x^2 : 0 < x \leq 0.5\}$,

und $M_3 := \{x = 3k : k \in \mathbb{N}\}$

Beispiel

$$M := \left\{ x(n) \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \right\}$$

Fragen: ist M beschränkt? Inf? Sup? Max? Min?

Wie sieht M aus?

<u>**n gerade:**</u> $x(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

Zahlenwerte für $n = 2, 4, 6, \cdots$: $x = \frac{5}{6}, \frac{9}{20}, \frac{13}{42}, \cdots$

n größer $\Longrightarrow$ $x(n)$ kleiner

Für gerade n gilt $\quad 0 < x(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \leq \frac{5}{6}$.

n ungerade: $x(n) = \frac{1}{n+1}$

Zahlenwerte für $n = 1, 3, 5, \cdots$: $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots$

n größer $\Longrightarrow$ $x(n)$ kleiner

Für ungerade n gilt $\quad 0 < x(n) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

M ist nach unten beschränkt z.B. durch 0 oder z.B. -1000

M ist nach oben beschränkt z.B. durch $\frac{5}{6}$ oder z.B. 1000

Für $n = 2$ gilt $x(2) = \frac{5}{6} \in M \Longrightarrow \frac{5}{6} = \max(M) = \sup(M)$

Infimum: Ist Null die größte untere Schranke?

Wir vermuten ja und beweisen dies indirekt.

Annahme : $\exists\, \epsilon > 0$ mit $0 < \epsilon \leq x(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$

Dann gilt für alle ungeraden n

$$0 < \epsilon \leq \tfrac{1}{n+1} \iff n+1 \leq \tfrac{1}{\epsilon} \iff n \leq \tfrac{1-\epsilon}{\epsilon}$$

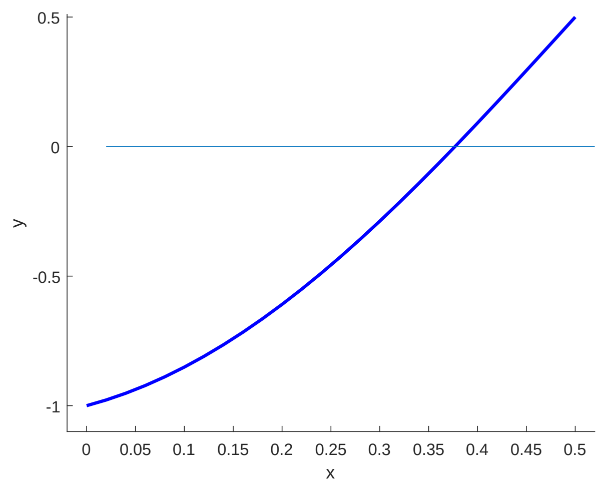
D.h.: die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ist nach oben beschränkt. Widerspruch!

Näherungen: Intervallhalbierungsverfahren

Gesucht Nullstelle einer Funktion f in einem Intervall $[a,b]$ mit $f(a)\cdot f(b) < 0$ mit absoluter Genauigkeit Tol.

Beispiel: $f(x) = x - \cos(\pi x)$

$a = 0:\ f(a) =$
$b = \frac{1}{2},\ f(b) =$



Idee:

Wann ist die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht?

- Anfangswerte : $n := 0,\ a_0 := a,\ b_0 = b,\ tol = Tol,\ Nmax = N$

- Iteration : solange $n < N$

  $m := (a_n + b_n)/2$

  falls $(b_n - a_n) < tol$:

  Ausgabe: Lösung = m, res = f(m), iterz=n, STOP!

  sonst

  falls $f(m) \cdot f(a_n) < 0 : a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := m$

  falls $f(m) \cdot f(b_n) < 0 : b_{n+1} := b_n, a_{n+1} := m$

  falls $f(m) = 0$: Ausgabe von Nullstelle m , STOP.

  $n := n + 1$

Beispiel: $f(x) = x - \cos(\pi x)$

tol= Gewünschte Genauigkeit in x-Richtung: hier 0.01
Maximale Zahl der Schritte: hier 10
res: f-Werte im aktuellen x-Vektor

MATLAB Aufruf/Ergebnis

```
>> Bisektion(@fun,0,0.5,0.01,10)
x = 0    0.2500    0.5000
fx = -1.0000   -0.4571    0.5000

x = 0.2500    0.3750    0.5000
fx = -0.4571   -0.0077    0.5000

x = 0.3750    0.4375    0.5000
fx = -0.0077    0.2424    0.5000

x = 0.3750    0.4063    0.4375
x = 0.3750    0.3906    0.4063
x = 0.3750    0.3828    0.3906

nst = 0.3828, res = -0.0077    0.0229    0.0537, iterz = 5
```

>>

Gibt es weitere Lösungen von $f(x) = x - \cos(\pi x) = 0$? Wo?