Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2019/2020
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 3 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vollständige Induktion, Funktionen, Binomialkoeffizienten 11/12.11.2019

Vollständige Induktion

Situation: Eine Aussage A(n) die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt soll für alle $n \geq n_0$ bewiesen werden. Der Einfachheit der Notation zu Liebe : hier zunächst $n_0 = 1$. Also

Eine Aussage die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt soll für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Beispiele

a) Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten n verschiedene Objekte zu sortieren.

b) Für die Summe der ersten N natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \ = \ 1 + 2 + 3 + 4 + \ \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Vorgehen :

Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ bewiesen. Für uns erst einmal $n_0 = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Man setzt voraus, dass die Aussage für irgendein N aus $\mathbb{N}$ gilt. Man sagt hier oft N sei beliebig aber fest.

Induktionsschritt: Man beweist, dass die Aussage dann auch für $N + 1$ gilt.

Nach diesen drei Schritten folgt (anschaulich nach dem Dominoprinzip, mathematisch nach PEANO), dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

Beispiel 1: Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^n > n$.
Beweis:

a) Anfang/Verankerung:

b) Voraussetzung/Annahme:

c) Schritt: Zu zeigen ist

Beweisstrategie :

1) Zerlege den neuen Ausdruck (hier 2^{N+1} oder $N+1$) in einen aus der Annahme bekannten und einen neuen Teil:

$2^{N+1} =$

2) Setzte die Information aus der Annahme ein

$2^{N+1} =$

3) Versuche nun durch Umformungen die Behauptung für $n = N + 1$ zu beweisen.

Wir haben: $2^{N+1} > N \cdot 2$

Ziel: $2^{N+1} > N + 1$

Hier soll also aus dem $2 \cdot N$ ein $N + 1$ werden:

$2^{N+1} > N \cdot 2 \quad \cdots \geq \quad N + 1$

Zum Beispiel so:

$2^{N+1} > 2 \cdot N$

Beispiel 2: (Induktionsanfang muss nicht bei 1 sein)

$2^n > 3n + 2, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; n \geq 4.$

Beweis:

Induktionsanfang: Für $n = n_0 =$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges festes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq n_0 =$ gelte:

Induktionsschritt: zu zeigen ist, dass für $n = N + 1$:

Beweis:

1) Zerlege den neuen Ausdruck hier wieder 2^{N+1} in einen aus der Annahme bekannten und einen neuen Teil:

$$2^{N+1} = 2^N \cdot 2$$

2) Setzte die Information aus der Annahme ein

$$2^{N+1} = 2^N \cdot 2 >$$

3) Versuche nun durch Umformungen die Behauptung für $n = N + 1$ zu beweisen.

Wir haben: $2^{N+1} > (3N + 2) \cdot 2$

Ziel: $2^{N+1} > 3(N + 1) + 2$

Beispiel 3: (ein wenig komplizierter) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis:
Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 \;=\; 1^2 \;\stackrel{?}{=}\; \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}\,.$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges festes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1$ gelte:

Induktionsschritt: zu zeigen: $\displaystyle\sum_{k=1}$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 \quad = \qquad \text{Zerlegung in alten und neuen Term}$$

$$= \qquad \text{Einsetzen der Induktionsvoraussetzung}$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$= \qquad \text{Umformen in Richtung der Behauptung}$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = $$

$$= \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$$

NICHT BLIND AUSMULTIPLIZIEREN!

Beispiel 4: (Ungleichung)

Behauptung : Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Beweis: *Induktionsanfang:* $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}\,.$$

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen mit einem festen aber beliebigem $N \in \mathbb{N}$ an, dass die Behauptung für N gilt, also

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{N}$$

Induktionsschritt: Wir beweisen nun die Beh. für $n = N + 1$.

Ziel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{N+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} &= \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(N+1)^2} \\ &\le 2 - \frac{1}{N} + \frac{1}{(N+1)^2} \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung}\end{aligned}$$

Funktionen / Abbildungen (vgl.auch Lineare Algebra)

Gegeben: zwei Mengen D und B

Eine Funktion $\quad f : D \to B, \qquad f : x \mapsto y, \quad f(x) = y$

ordnet **jedem** x aus D **genau ein** y aus B zu.

$D =$ **Definitionsbereich** und $B =$ **Bildbereich** von f.

Bild von $A \subset D$
$f(A) := \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$

Urbild von $C \subset B$
$f^{-1}(C) := \{x \in D : \exists y \in C : y = f(x)\} = \{x \in D : f(x) \in C\}$

Eigenschaften von Funktionen (vgl. auch Lineare Algebra)

f heißt **surjektiv**, wenn $B = f(D)$, d.h

$\forall\, y \in\ B\ :\ \exists\, x \in\ D\ :\ y = f(x)$

d.h. zu jedem $y \in B$ gibt es **mindestens** ein x mit $y = f(x)$.

f heißt **injektiv**: $x_1,\, x_2\, \in\ D \wedge x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
d.h. zu jedem $y \in B$ gibt es **höchstens** ein x mit $y = f(x)$.

bijektiv $=$ injektiv und surjektiv
d.h. zu jedem $y \in B$ gibt es **genau** ein x mit $y = f(x)$.

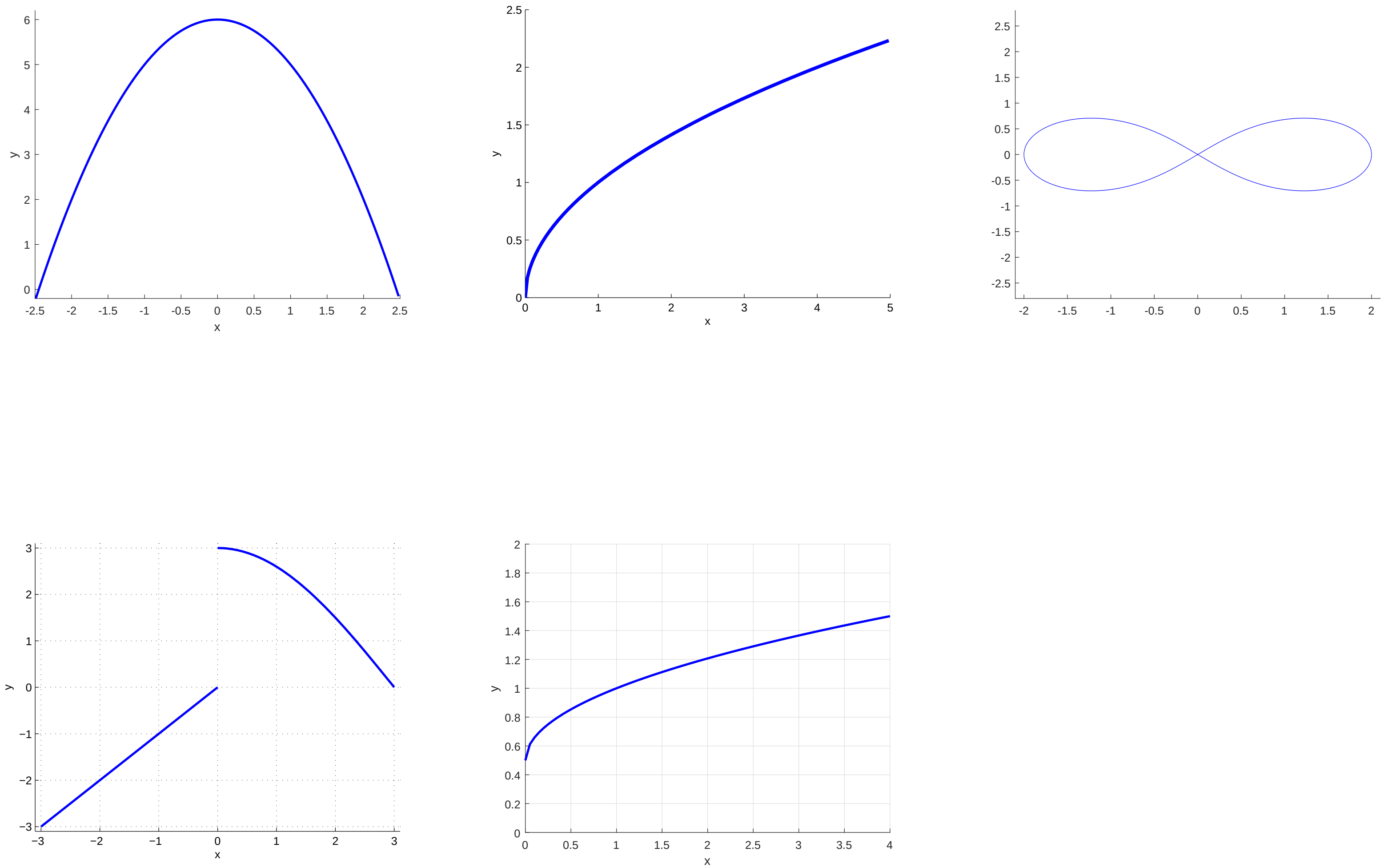
Bijektive Funktionen besitzen **Umkehrfunktionen**:

$$f^{-1} \,:\, B \to \, D \quad f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x \,.$$

In Analysis I: In der Regel: D, $B \subset \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ graphische Interpretation

Beispiele, graphische Interpretation: (vgl. Hausaufgabe 1a)



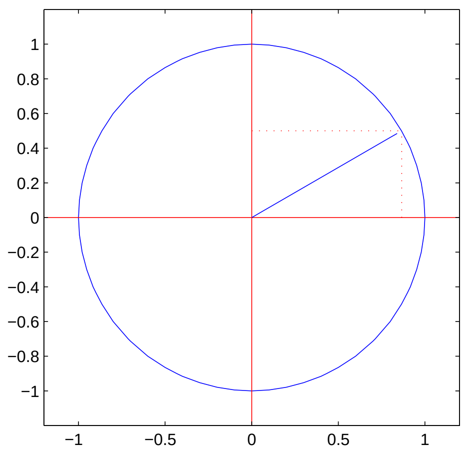
Elementare reelle Funktionen (vgl. Hausaufgaben 1b, 2a, 2b)

- **Winkel**: Wir rechnen im Bogenmaß:

  Umfang des Einheitskreises: $2\pi \longrightarrow$ Bogenlänge zu 360° $= 2\pi$

  Umfang halber Einheitskreises: $\pi \longrightarrow$ Bogenlänge zu 180° $= \pi$

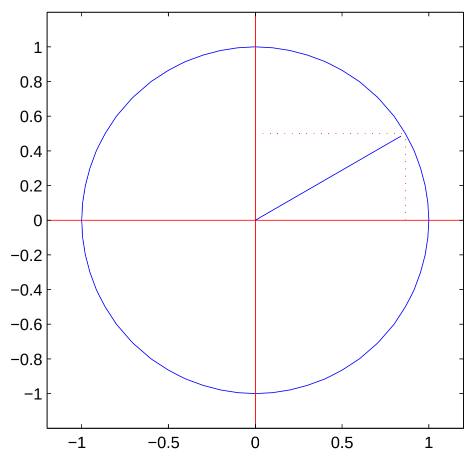
  Bogenlänge ϕ, die zu einem Winkel mit g Grad gehört: $\dfrac{\phi}{\pi} = \dfrac{g}{180}$



Trigonometrische Funktionen: $\sin(x)$, $\cos(x)$.

Gegeben : $\phi =$ Winkel zwischen positiver $x-$Achse und Ortsvektor des Punktes mit Koordinaten x und y auf dem Einheitskreis entgegen Uhrzeigersinn gemessen.

Definiere: $\cos(\phi) \ := \ x, \qquad \sin(\phi) \ := \ y.$

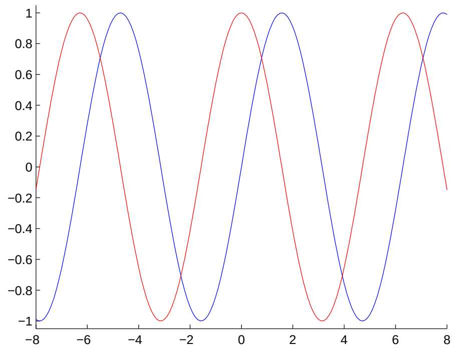


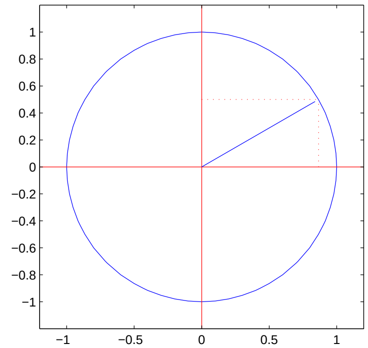
Aus der Geometrischen Interpretation ist unmittelbar klar:

Pythagoras : $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \ := (\cos(\phi))^2 \ + \ (\sin(\phi))^2 \ = \ 1$

Periodizität :

$$\cos(2\pi + \phi) = \cos(\phi) \qquad \sin(2\pi + \phi) = \sin(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathbb{R}$$

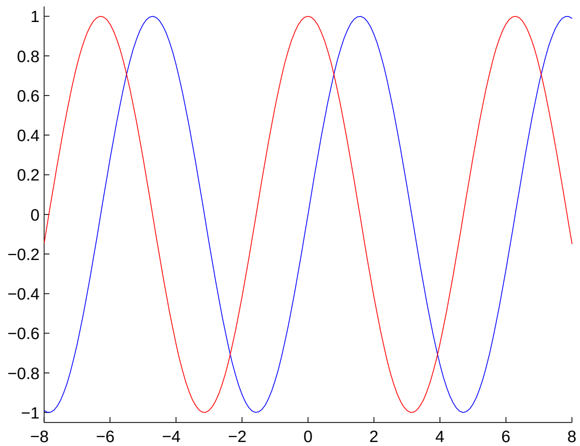


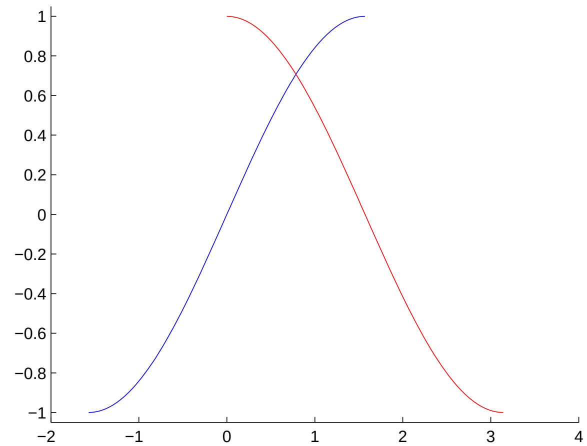


Symmetrie :

$$\cos(-\phi) = \cos(\phi) \qquad \sin(-\phi) = -\sin(\phi) \qquad \forall\, \phi \in \mathbb{R}$$

Umkehrung: $\sin$, $\cos$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.





Umkehrung nur möglich, wenn man den Definitionsbereich einschränkt:

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1], \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], \qquad \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos(a)$: die Bogenlänge, die zum Cosinuswert a gehört.

$\arcsin(b)$: die Bogenlänge, die zum Sinuswert b gehört.

Häufig benutzte Werte :

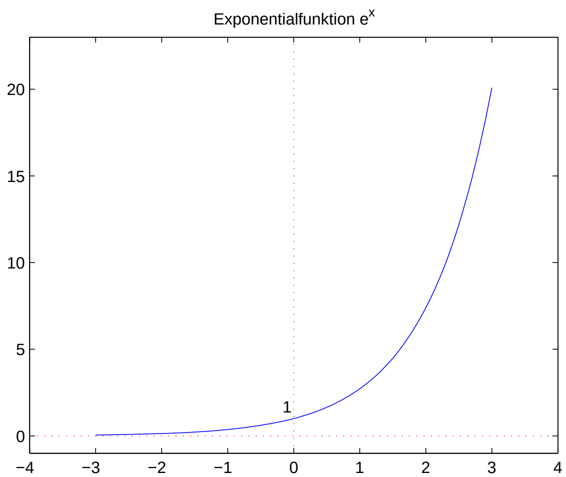
ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\phi)$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\phi)$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1

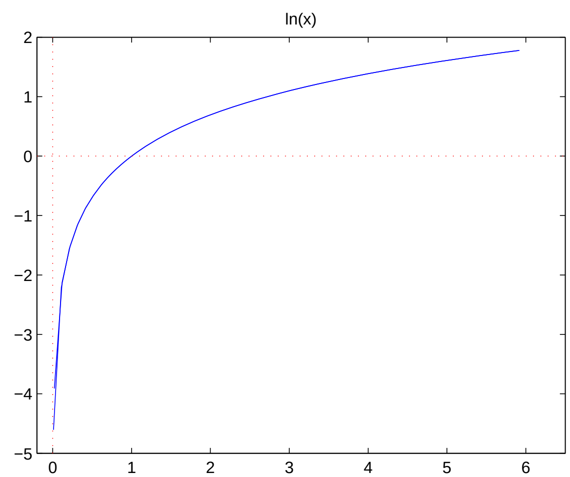
a	-1	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin(a)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(a)$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

• Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^0 = 1 \qquad a \in \mathbb{R}^+ .$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad e = 2.7182818\cdots =: \text{Eulersche Zahl.}$$





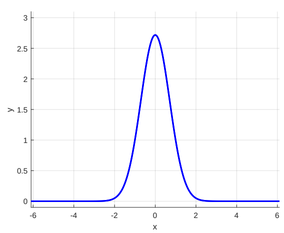
$$\ln(e^x) = x, \qquad \log_a(a^x) = x, \qquad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) .$$

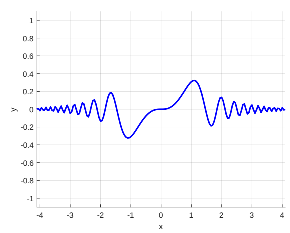
Funktion	Natürlicher Definitionsbereich	Bildbereich
e^x, a^x $a > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$\ln(x),\ \log_a(x)$ $a > 0$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
$\cos(x), \sin(x)$ $\arccos(x)$ $\arcsin(x)$	$\mathbb{R}$ $[-1, 1]$ $[-1, 1]$	$[-1, 1]$ $[0, \pi]$ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

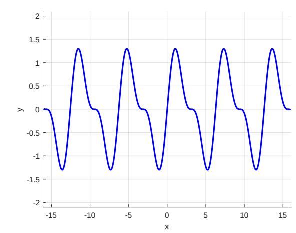
Beispiel zur Aufgabe Hausaufgabe 1b

Die Plots gehören zu

$$\sin(x)(1+\cos(x)), \qquad \exp(1-x^2), \qquad e^{-\sqrt{x^2}}\sin(x^3)$$







Who is who?

Symmetrie

Eine reellwertige Funktion f auf einem Intervall $[-a, a]$ bzw. $(-a, a)$ heißt

- **gerade** wenn ihr Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist

  $$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \in D \iff -x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$

  Beispiele x^{2k}, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \cos(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- **ungerade** wenn ihr Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist

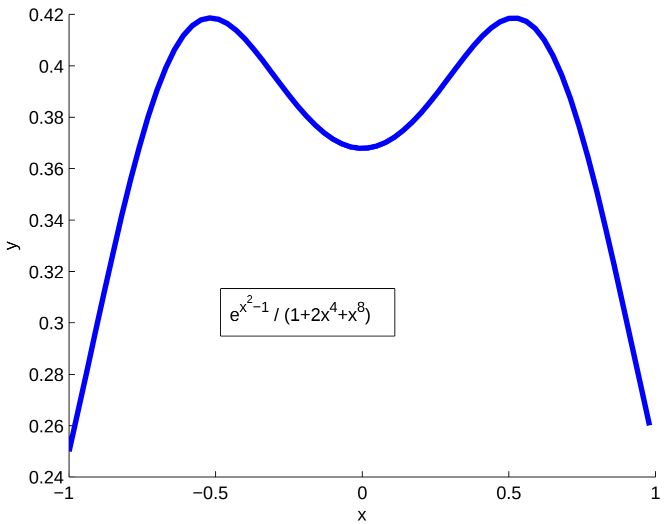
  $$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \in D \iff -x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

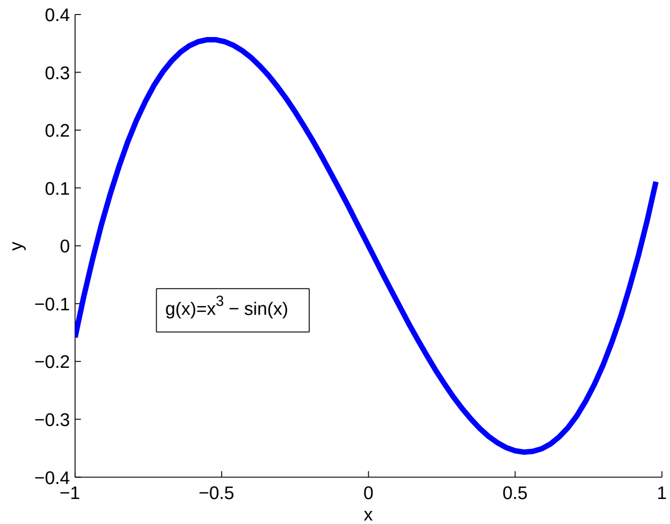
  Beispiele x^{2k-1}, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad \sin(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

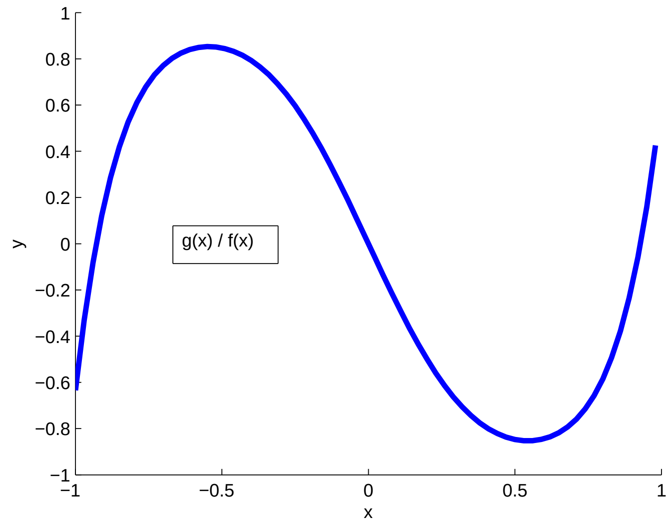
Nützlich zum Beispiel bei Kurvendiskussionen und Approximationen

Beispiele (vgl. Hausaufgabe 2a):

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{1+2x^4+x^8}, \qquad g(x) = x^3 - \sin(x),$$







$$g/f,\ f+g^2$$

Fakultäten und Binomialkoeffizienten : (vgl. P2)

Für $n \in \mathbb{N}$: $$n! := \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \qquad =: \; n-\text{Fakultät}$$

Definition: $0! := \prod_{k=1}^{0} k \;=\; 1.$

Binomialkoeffizienten : Für $n,\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;=: \mathbb{N}_0,\, n \geq k$:

$$\binom{n}{k} \;:=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \binom{n}{n} \;=\; \binom{n}{0} \;= 1.$$

Beispiel: Beweisen oder widerlegen Sie (zum Beispiel mit Hilfe eines Gegenbeispiels) folgende Aussagen

a) $\forall k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k}$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{k+1} \leq (n-k)\binom{n}{k}$.

a) Falsch!
Gegenbeispiel: $n = \binom{n}{1} < \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n : \frac{n-1}{2} > 1.$

b) $\forall k,\ n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{k+1} \leq (n-k)\binom{n}{k}$.

Richtig, denn

$$\binom{n}{k+1} \leq (n-k)\binom{n}{k} \iff \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \leq (n-k)\frac{n!}{(n-k)!k!}$$