Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2019/2020
Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 2 Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aussagen, Beweistechniken, einfache geometrische Gebilde im $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$

28/29.10.2019

Ablauf, Organisation, Material

Vorlesung:
Prof. Struckmeier, Di 13:15-14:45 Audimax I, Do 11:30- 13:00, Audimax II

Übungen : 32 Gruppen, 15 Tutoren, **Anmeldung erforderlich!**, siehe

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1920/gruppen.html

14-täglich im Wechsel mit den Übungen zu Lineare Algebra

Übungsaufgaben:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1920/lm.html

Abgabe der Übungsaufgaben jeweils in Gruppen von 2-4 Personen

Hörsaalübung: Brücke zwischen Vorlesung und Übung/Klausur

Hanna Peywand Kiani, Mo 14:45-16:15 Uhr und Di 09:45-11:15 Uhr,
jeweils Audimax I

14-täglich im Wechsel mit den HÜ zur Linearen Algebra
(Dr. Julian Großmann)

Alle Infos, Alles an Material zu Analysis (alte Klausuren, Sprechstunden etc.) unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Kiani: Tel. 42838-4940

e-mail: kiani at math.uni-hamburg.de

Sprechstunden: SBC-3 ,Raum E-3078

1.1.(Mathematische) Aussagen

sind sprachliche Gebilde, die eindeutig **wahr** oder **falsch** sind.

Einer Aussage wird der **Wahrheitswert** w (bzw. 1) oder f (bzw. 0) zugeordnet.

Beispiele:

Das Wetter ist schön.

Die Temperatur in diesem Saal liegt zwische 0° und 40°.

Aussageform: hängt von einer Variablen ab.

Beispiel. $\Omega :=$ Menge aller Personen im Saal.

$A(x)$: x gibt sein Geschlecht als männlich an.

$B(x)$: x trägt eine blaue Hose

$C(x)$: x ist älter als 80 Jahre

$D(x)$: x studiert Maschinenbau

Aussagen kann man verknüpfen. Zum Beispiel

Aussage $\tilde{A}$: zwei ist eine gerade Zahl. (wahr)

Aussage $\tilde{B}$: zwei ist eine Primzahl. (wahr)

Aussage $\tilde{C}$: $2 \cdot 3 = 5$ (falsch)

Dann ist

$\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ $=:$ $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ wahr,

$\tilde{A} \wedge \tilde{C}$ falsch,

$\tilde{A}$ oder $\tilde{B}$ $=:$ $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ wahr.

Merke : Das mathematische oder ist kein entweder oder. Genauer:

Konjunktion (und) (Serienschaltung)

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Adjunktion/Disjunktion (oder) (Parallelschaltung)

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Negation von A : $\neg A$ bzw. $(\bar{A})$ (bei Schaltern $\bar{s}$)

A	$\neg A$
1	0
0	1

Implikation $B \vee \neg A$ bzw.

A	B	$A \Longrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Äquivalenz

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Beispiel 1 zur Implikation

Aussagen : $A(x): \ x > 3, \qquad B(x): x^2 > 1$

Ist die Aussage: aus $A(x)$ folgt $B(x)$ wahr?

Welche Kombinationen von $w(A(x))$, $w(B(x))$ können auftreten?

$A(x)$: falsch

– z.B. $x = 2$

– z.B. $x = 0$

$A(x)$ wahr $\Longrightarrow$ offensichtlich ist $B(x)$ auch wahr

Wenn $A \Longrightarrow B$ wahr ist, dann kann nicht auftreten:

Beispiel 2 zur Implikation

Beispiel. $\Omega :=$ Menge aller Personen im Saal.

$C(x)$: x ist älter als 80 Jahre

$D(x)$: x studiert Maschinenbau

Aussage: Für alle $x \in \Omega : C(x) \Longrightarrow D(x)$

Gilt die Implikation?

Beispiel für eine Äquivalenz:

$x \in \mathbb{R}$

$A(x) : |x| > 3$, $B(X) : x^2 > 9$

Behauptung: $(A \implies B) \iff (B \vee \neg A) \iff \neg(A \wedge \neg B)$.

Beweis über Wahrheitstafeln:

A	B	$A \implies B$	$\neg A$	$B \vee \neg A$	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	1	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	0	1					

In der Hausaufgabe: A, B, C

Zur Hausaufgabe 2: Für Alle / Es gibt / Verneinen / Aussageformen:

$\forall$, $\exists$, $\neg$

$$\neg\,(\forall x \in M \,:\, B(x)) \iff \exists x \in M \,:\, \neg B(x)$$

Beispiele für Verneinungen:

a) $M :=$ Menge aller Personen im Saal, die sich als männlich bezeichnen.

$B(x)$: Person x trägt eine blaue Hose

Behauptung: $\forall x \in M \,:\, w(B(x)) = 1$

Verneinung:

b) $\forall\, x \in \mathbb{N}$ gilt $x \cdot x > \ x$

Verneinung:

c) $\exists\, y \in M_2 : \ (\forall\, x \in M_1 \ : \ x \cdot y \in \ M_1\,)\,.$

Verneinung:

Beweistechniken: Zu Beweisen sei $A \implies B$

– direkter Beweis $A \iff \cdots \implies \cdots B$,

– indirekter/Widerspruchsbeweis: führe Annahme $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch.

– Gegenbeispiel

Beispiele:

Indirekter Beweis:

a) $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$

Wobei $\mathbb{Q} =$

und $x = \log_{10}(2) \iff 10^x = 2$

Beweis:

Annahme : $\log_{10} 2 = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{Z},\ m, n$ teilerfremd und $n \neq 0$. Dann ist

$2 = 10^{\frac{m}{n}} \implies$ (Nenner stört!)

$2^n = 10^m$ (Kürzen!)

b) $|\,2ab\,| \;\leq\; a^2 + b^2 \qquad \forall\, a,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.$

Beweis:

Annahme : Es gibt reelle Zahlen a, b mit $|\,2ab\,| \;>\; a^2 + b^2$. Dann folgt

$|\,2ab\,|^2 \;>\; (a^2 + b^2)^2$ (Darf man das immer?)

$\Longleftrightarrow$ (1. binomische Formel)

$\Longleftrightarrow 0 \;>$ (Alles auf eine Seite)

Widerspruch!

Gegenbeispiele

a) $\Omega :=$ Menge aller Personen im Saal.

$A(x)$: x bezeichnet sich als männlich

$B(x)$: x trägt eine blaue Hose

Was glauben Sie: Ist die Behauptung wahr?

Beweis:

Merke: Die Negation von ($\forall\, x \in M : A(x)$) ist ($\exists\, x \in M : \neg A(x)$).

b) $\forall\, x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq x$.

Was glauben Sie: Ist die Behauptung wahr?

Beweis:

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k = n^2 - n + 1\,.$$

Direkter Beweis:

a) $|\,2ab\,| \;\leq\; a^2 + b^2 \qquad \forall\, a,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.$

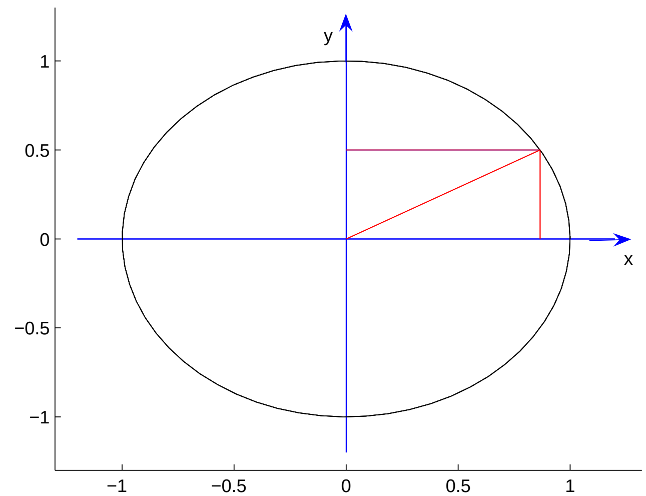
b) Für alle $n \,\in\, \mathbb{N}$ gilt: Die Zahl $m := 6n^2(n^2+3)$ ist durch 24 teilbar.

Kann man das vereinfachen?

Fallunterscheidung: $n \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow\; (\,\exists k \in \mathbb{N}_0 : (n = 4k-1 \,\vee\, n = 4k \,\vee\, n = 4k+1 \vee\, n = 4k+2)\,)$

Einfache geometrische Gebilde im $\mathbb{R}^2$ (Aufgabe P3)

Kreise



$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$x = R\cos(\phi)$$
$$y = R\sin(\phi)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \| v \|_2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

$R =$ Abstand des Punktes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vom Ursprung.

Kreis mit Radius 2 um Null:

$$\text{Einheitskreis} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, : \, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Andere Abstandsbegriffe:

Zum Beispiel: nur waagerechte und senkrechte Bewegung möglich (Roboter, Manhatten-Abstand, Taxi)

Abstand zu Null: $|x| + |y| = \|v\|_1 =$ 1-Norm (siehe Lineare Algebra)

Beispiel : $|x| + |y| = K$

Beachte Symmetrie:

Untersuche also nur den 1. Quadranten.

$$|x| + |y| = K \iff x + y = K \iff y = K - x$$

$=$ Geradenabschnitt durch $\begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$

Symbol	Bedeutung
$\vee$	oder
$\wedge$	und
$\neg$	Verneinung
$\Longrightarrow$	Implikation
$\Longleftrightarrow$	Äquivalenz
$\in$	Element
$\forall$	für alle
$\exists$	Es gibt
$\exists_1$, $\exists!$	Es gibt genau ein
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\cup$	Vereinigung
$\cap$	Schnittmenge