

## Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

a) Gegeben seien die Mengen

$$A = [-1, 0] \times [-1, 1], \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Man stelle folgende Mengen graphisch dar:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cap C$ ,  $C \setminus B$ .

b) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn  $f(x) = f(-x)$  gilt, bzw. *ungerade*, wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i)  $f(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}$ ,

(ii)  $g(x) = (x - 2)^3 + 4$ .

#### Aufgabe 6:

a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i)  $f_1 : [-4, 4] \rightarrow [0, 5]$ ,  $f_1(x) = |3 - 2|x||$ ,

(ii)  $f_2 : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_2(x) = \ln x$ ,

(iii)  $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,

(iv)  $f_4 : (-1, 1) \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f_4(x) = x^3$ .

b) Für die Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D = [3, \infty)$  und der Funktionswertzuweisung  $f(x) = x^2 - 6x + 10$  gebe man den Wertebereich  $W$  an, berechne, falls dies möglich ist, die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  und zeichne  $f$  und  $f^{-1}$ .

**Aufgabe 7:**

Man beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion

a) 
$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

b)  $a_n := (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$  ist durch 9 teilbar.

**Aufgabe 8:**

a) Man beweise, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgende Ungleichung gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

b) Zur Berechnung von  $\prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2-1}$  finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

**Abgabetermin:** 19.11. - 23.11.18 (zu Beginn der Übung)