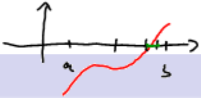
Eigenschaften stetiger Funktionen

Buch Kap. 2.5

Satz 2.6: (Nullstellensatz)

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, so besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.



Beweis (Skizze)

Wir betrachten $x = \frac{a+b}{2}$

1. Fall: $f(x) = 0 \to$ fertig

2. Fall: $f(x) < 0$: Setze $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$

3. Fall: $f(x) > 0$: Setze $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$

Wir betrachten $x = \frac{a_1+b_1}{2}$

1. Fall: $f(x) = 0 \to$ ☺

2. Fall: $f(x)$ und $f(a_1)$ untersch. Vz.: Setze $a_2 = a_1$, $b_2 = x$

3. Fall: $f(x)$ und $f(b_1)$ untersch. Vz: Setze $a_2 = x$, $b_2 = b_1$

Erhalte so Folgen (a_n), (b_n)

Es gilt: (a_n), (b_n) konv., da beschr. und monoton. Weiter gilt $\lim a_n = \lim b_n$ und $f(a_n)$, $f(b_n)$ untersch. Vz

wegen Stetigkeit gilt $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = 0$.

Also gilt für $x = \lim a_n$: $f(x) = 0$

Eigenschaften stetiger Funktionen

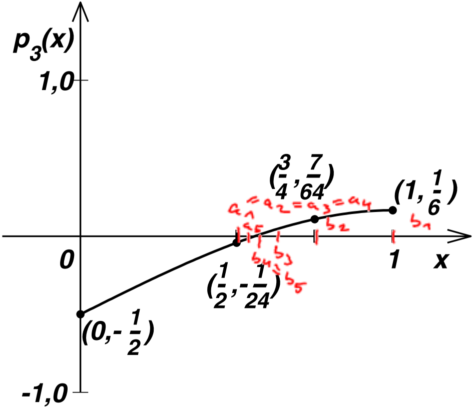


Abbildung 2.27: Bestimmung einer Nullstelle für $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 2.7: (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\bar{y}$ eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\bar{x}$ zwischen a und b mit

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

d.h. eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis

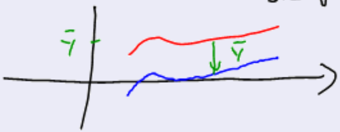
Sei $\bar{y}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Betrachte „Hilfsfunktion" $s(x) = f(x) - \bar{y}$, $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ $s(a)$ und $s(b)$ haben versch. Vz

$\Rightarrow$ (Nullst.-Satz) $\exists\, \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) - \bar{y} = s(\bar{x}) = 0$

$\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = \bar{y}$



Extremalstellen

Buch Kap. 2.5

Definition 2.19: (Maximal- und Minimalstelle)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Gibt es $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Maximalstelle, $f(x_0)$ das Maximum von f. Gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so heißt x_0 Minimalstelle und $f(x_0)$ Minimum von f.

Satz von Weierstraß

Satz 2.9:(Weierstraß)

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es existieren Elemente $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \; .$$

Jede stetige Funktion nimmt also auf einem abgeschlossenen Intervall Maximum und Minimum an.

Gilt das auch für stetiges $f : (a, b] \to \mathbb{R}$?

Nein, da $\frac{1}{x} : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und unbeschr.

Gilt das auch für stetig f auf unbeschr. Intervall?

Nein, da $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und unbeschr.

Differentiation

Differenzierbarkeit

Tangentensteigung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

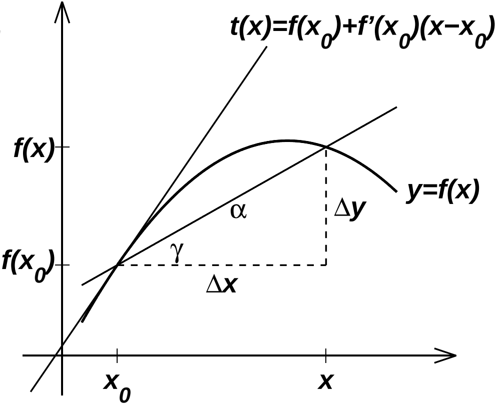


Abbildung 2.30: Sekante und Tangente an f in x_0

Differenzierbarkeit

Definition 2.21: (Differenzierbarkeit)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein Intervall. f heißt **differenzierbar** im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ (oder $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$) bezeichnet und Ableitung oder Differentialquotient von f in x_0 genannt.

Beispiele

a) Frau/Herr X fährt Auto in Zeitintervall $[t_0, t_1]$

$S(t)$: Position des Autos zum Zeitpunkt t

$\frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0}$ Durchschnittsgeschw.

$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ " im Intervall $[t, t+\Delta t]$

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

b) $q(t)$: transportierte Ladung bis zum Zeitpunkt t.

$q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$

$\frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}$ Durchschnittsstrom, $i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$ Strom zum Zeitpunkt t

Differenzierbarkeit

Buch Kap. 2.6

Definition 2.23, 2.26: (Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit auf $I \subset D$)

- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ differenzierbar, wenn f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist, und in jedem zu I gehörigem Randpunkt einseitig differenzierbar ist.
- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf dem Intervall $I \subset D$ stetig differenzierbar, falls sie dort differenzierbar ist und die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Differenzierbarkeit

Buch Kap. 2.6

Satz 2.10: (Differenzierbarkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit)

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie an der Stelle x_0 auch stetig.

Beachte: Aus Stetigkeit folgt nicht Diff'barkeit.

Bspw: $f(x) = |x|$

f ist stetig

f ist nicht diff'bar in 0, denn

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

Differenzierbarkeit

Buch Kap. 2.6

Ableitungsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Die Ableitung einer Funktion f wird durch f' bezeichnet.

(i) Ableitung von Summe, Produkt und Quotient
$(f+g)' = f' + g'$
$(c \cdot f)' = cf'$ (c reelle Konstante)
$(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel)

(ii) Kettenregel
$(f \circ g(x))' = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(iii) Ableitung der Umkehrfunktion
Ist $y = f(x)$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Differentiationsregeln für Grundfunktionen Buch Kap. 2.6

- $(x^\nu)' = \nu\, x^{\nu-1}$ $(\nu \in \mathbb{Z})$
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$

Beispiele

Beh: $\forall n \in \mathbb{N}: \quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

1. Beweis: Induktion nach n:

$n=1$: $f(x) = x$. $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$n \to n+1$: Sei $(x^n)' = n x^{n-1}$.

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)'$$
$$= n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1$$
$$= n x^n + 1 \cdot x^n = (n+1) x^n \checkmark$$

Beispiele

$f(x) = x^n$.

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k} \quad - x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k} \quad \cancel{+ x^n - x^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k} \quad + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{=n} x^{n-1} \Delta x$$

$$= \Delta x \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k-1} \quad + n \Delta x \, x^{n-1}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k \Delta x^{n-k-1}}{\Delta x} + n \frac{\Delta x}{\Delta x} x^{n-1} \to n x^{n-1}$$

$\to 0$ bei $\Delta x \to 0$