Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie **einen** der folgenden Grenzwerte

entweder $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+2n^2}{2n+1}+\dfrac{1-3n^2}{3n+2}\right]$, $\quad n\in\mathbb{N}$

oder $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k+3^{k+1}}{8^k}$.

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}\,(k+1)}{5^k}$ auf Konvergenz.

c) (i) Untersuchen Sie die Reihe $s:=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}$ auf Konvergenz.

(ii) Konvergiert die Reihe s aus Teil (i) auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: (3+4+3 Punkte).

a)

$$a_n=\frac{n+2n^2}{2n+1}+\frac{1-3n^2}{3n+2}=\frac{(n+2n^2)(3n+2)+(1-3n^2)(2n+1)}{(2n+1)(3n+2)}\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

$$=\frac{3n^2+2n+6n^3+4n^2+2n+1-6n^3-3n^2}{6n^2+7n+2}=\frac{4n^2+4n+1}{6n^2+7n+2}\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(6+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2})}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

Alternativ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k+3^{k+1}}{8^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{8^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{8^k}\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{4}{8}}+3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{8^k}\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{8}}==2+3\cdot\frac{8}{5}=\frac{10+24}{5}=\frac{34}{5}=6.8\,.\qquad\textbf{(1 Punkt)}$$

b) Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^k(k+1+1)}{5^{k+1}} \cdot \frac{5^k}{3^{k-1}\,(k+1)} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{3(k+2)}{5(k+1)} = \frac{3}{5}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{3}{5} < 1. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotienten-Kriterium. **(1 Punkt)**

Alternativ: Wurzelkriterium

c) Mit $a_k := \dfrac{1}{\sqrt{k}+1}$ gilt:

(i) – $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

– $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, denn $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{k}+1}$.

Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. **(2 Punkte)**

(ii) Die Reihe konvergiert nicht absolut, denn für

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}\right|$$

gilt

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k+k} = \frac{1}{2k} \qquad \forall k\in\mathbb{N}\,.$$

Im Falle der Konvergenz hätte man eine Majorante für die harmonische Reihe. **(2 Punkte)**

Aufgabe 2:

a) Für welche Parameter a und b aus $\mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{(x-1)^2} + 2x & : \; x \leq 1\,, \\ ax^2 + bx + 1 & : \; x > 1\,, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \; D := (-1, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) \; = \; (x+1) \cdot \ln(x+1)\,.$$

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie in Teil b) (i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.2$$

die Abschätzung

$$|\,R_2\,(x)\,| \; := \; |\,f(x) \; - \; T_2\,(x)\,| \; \leq \; \frac{1}{400}$$

gilt.

Lösung:

a)

$$f(x) := \begin{cases} e^{(x-1)^2} + 2x & x \leq 1\,, \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1\,, \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1-} 2(x-1)e^{(x-1)^2} + 2 = 2$.

$\lim\limits_{x \to 1+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1+} 2ax + b = 2a + b$. [**1 Punkt**]

Die Funktion kann also nur für $\boxed{b = 2 - 2a}$ stetig differenzierbar sein. [**1 Punkt**]

Da jede differenzierbare Funktion stetig ist, muss aber noch

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = e^0 + 2 = 3 = \lim\limits_{x \to 1+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$ [**1 Punkt**]

gelten. Einsetzen von $b = 2 - 2a$ ergibt:

$3 = a + 2 - 2a + 1 \iff 0 = -a$.

Woraus $\boxed{a = 0,\, b = 2}$ folgt. [**1 Punkt**]

b) (i) [**3 Punkte**]

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{x+1}\cdot(x+1)+\ln(x+1) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \tfrac{1}{x+1} & f''(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$T_2(x) = 0 + x + \frac{1}{2}x^2\,.$$

(ii) [**3 Punkte**]

$$f'''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} |\,R_2\,(x;x_0)\,| &\le \frac{|f'''(\theta)|}{3!}\,|(x-0)^3| \le \frac{1}{(\theta+1)^2}\cdot\frac{8}{6000} \\ &\le \frac{1}{(0.8)^2}\,\frac{8}{6000} = \frac{100}{8\cdot 6000} = \frac{1}{480}. \end{aligned}$$