Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie **einen** der folgenden Grenzwerte

$$\textbf{entweder} \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+2n^2}{2n+1} + \frac{1-3n^2}{3n+2} \right], \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\textbf{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k + 3^{k+1}}{8^k} .$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}\,(k+1)}{5^k}$ auf Konvergenz.

c) (i) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+1}$ auf Konvergenz.

(ii) Konvergiert die Reihe s aus Teil (i) auch absolut? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

a) Für welche Parameter a und b aus $\mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{(x-1)^2} + 2x & : \ x \le 1, \\ ax^2 + bx + 1 & : \ x > 1, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \ D := (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) .$$

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie in Teil b) (i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \le 0.2$$

die Abschätzung

$$|\,R_2\,(x)\,| := |\,f(x) - T_2\,(x)\,| \le \frac{1}{400}$$

gilt.

Viel Erfolg!