Aufgabe 1:

a) Weisen Sie nach, dass die rekursive Folge

$$a_1 := 1\,, \qquad a_{n+1} := \frac{2}{5}\,(a_n + 3)$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - (n-2) \right).$$

Lösung zur Aufgabe 1: (6+ 4 Punkte)

a) Falls die Folge konvergiert, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, dann

$$a = \frac{2}{5}\,(a+3) \iff 5a = 2a + 6 \iff a = 2.$$

Der einzig mögliche Grenzwert ist also $a = 2$. **(1 Punkt)**

$a_1 = 1\, a_2 = \frac{8}{5}$. Vermutung: Die Folge ist monoton steigend und nach oben beschränkt durch 2. **(1 Punkt)**

1) Behauptung: Folge nach oben beschränkt durch 2 d.h.: $a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang : Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 \leq 2$.

Induktionsannahme : Für ein festes bel. $N \in \mathbb{N}$ gelte $a_N \leq 2$.

Induktionsschritt:

Dann gilt: $a_{N+1} = \frac{2}{5}\,(a_N + 3) \leq \frac{2}{5}\,(2+3) = 2$. **(2 Punkte)**

2) Behauptung: Die Folge ist monoton steigend also $a_{n+1} \geq a_n$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$a_2 = \frac{8}{5} > a_1 = 1.$$

.

Induktionsschritt: Für ein festes bel. $N \in \mathbb{N}$ gelte $a_{N+1} \geq a_N$.

Dann folgt:

$a_{N+1} + 3 \geq a_N + 3 \iff \frac{2}{5}\,(a_{N+1} + 3) \geq \frac{2}{5}\,(a_N + 3) \iff a_{N+2} \geq a_{N+1}$.
(2 Punkte)

Die Folge konvergiert also gegen 2.

b) Ansatz (3. binomische Formel): **(1 Punkt)**

$$a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - (n-2) = \frac{(\sqrt{n^2+2n+3} - (n-2))(\sqrt{n^2+2n+3} + (n-2))}{\sqrt{n^2+2n+3} + (n-2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+3-(n-2)^2}{\sqrt{n^2+2n+3} + (n-2)} = \frac{n^2+2n+3-n^2+4n-4}{\sqrt{n^2+2n+3} + n-2} \text{ \textbf{(1 Punkt)}}$$

$$= \frac{6n-1}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})} + n-2} = \frac{n(6-\frac{1}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} + 1 - \frac{2}{n}\right)} \text{ \textbf{(1 Punkt)}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6}{\sqrt{1}+1} = 3 \text{ \textbf{(1 Punkt)}}.$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x)-\cos(2x)-x}{x^2}\,.$$

b) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} + 4x^2 - 4x + \sin(x) - 2\,.$

(i) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

(ii) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $[0, 1]$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum, ein Minimum oder um einen Sattelpunkt?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung)

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x)-\cos(2x)-x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+2\sin(2x)-1}{2x} \textbf{(1 Punkt)}$$
$$\overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)+4\cos(2x)}{2} = 2\,.\textbf{(1 Punkt)}$$

b) (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} + 4x^2 - 4x + \sin(x) - 2, \\ f'(x) &= 2e^{2x} + 8x - 4 + \cos(x)\,, \\ f''(x) &= 4e^{2x} + 8 - \sin(x) \geq 0 + 8 - 1 > 0\,.\textbf{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

Da f'' keine Nullstellen hat, hat f' höchstens eine Nullstelle und f höchstens zwei Nullstellen.

Es gilt:

$f(0) = e^0 + 0 - 0 + 0 - 2 = -1 < 0,$

$f(-1) = e^{-2} + 4 + 4 + \sin(-1) - 2 > 5 > 0,$

$f(1) = e^2 + 4 - 4 + \sin(1) - 2 > 2^2 - 1 - 2 > 0.$

Es gibt also mindestens zwei Nullstellen von f in $\mathbb{R}$. **(2 Punkte)**

Alternativ z.B.
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$

Insgesamt folgt, dass f genau zwei Nullstellen hat.

(ii) Aus i) folgt, dass f' höchstens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. **(1 Punkt)**

$$f'(0) = 2e^0 + 0 - 4 + \cos(0) = 2 - 4 + 1 < 0$$

und

$f'(1) = 2e^2 + 8 - 4 + \cos(1) > 8 - 1 > 0\,.$

Es gibt also eine Nullstelle x_0 von f' im Intervall $I := [0, 1]$.
(1 Punkt)

Aus Teil a) ist bekannt, dass f' höchstens eine Nulstelle hat. Also gibt es genau eine Nullstelle von f' und diese liegt im Intervall I.

Es handelt sich um ein Minimum, da f'' überall positiv ist.
(1 Punkte)

Außerhalb von I kann es kein Extremum mehr geben, da die notwendige Bedingung $f' = 0$ nur in $x_0 \in I$ erfüllt ist. **(1 Punkt)**