Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} && f_1(x) = \frac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest,} \\
&f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} && f_2(x) = \sqrt[x]{x}, \\
&f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} && f_3(x) = \ln(x^2+1) \cdot (x^2+1) + x^2 \sin(2x).
\end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega-1)x^2 + (2-\omega)x & x \in [0,1] \\ A\sin(\omega x) & x \in (1,2] \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0,2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) differenzierbar ist.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)}$ (Klausur 07/08)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2+x^2-2\cos(x)}{x^2}$ (Klausur 03/04)

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos(x)+2x^2-1}$ (Klausur 09/10)

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\, x) - 3x^2 - e^{2x} + 12\,.$

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $]-1, 1[$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum ((Handelt es sich um ein Maximum, ein Minimum oder um einen Sattelpunkt?).

   Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x + 1)\, e^{-3x} + \sin(\frac{x}{5})\,.$

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f .

b) Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $|R_2(x; 0)| := |f(x) - T_2(x; 0)|$ im Intervall $\left[-\frac{15}{100}, \frac{15}{100}\right]$ nach oben durch 0.02 beschränkt ist.

Besprechung: während der Übungen vom 29.01.2018 bis 02.02.2018