# Analysis I
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 6, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-2k-1}{4k^2-7k} \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k+\sqrt{k}}$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{k\pi}{4})+1}{3^k} \qquad \text{d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2k^3-k^2+4k}\,.$$

**Aufgabe 2:** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3^k\,(k+1)} \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot \left(\frac{k+5}{k+3}\right)^{-k}$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{(2k)!} \qquad \text{d)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k^3}{16}\left(\sqrt{k^6+5}-\sqrt{k^6-3}\right)\right]^k$$

**Aufgabe 3:**

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+6}{k(k+1)}$ konvergiert.

Sei $s$ der Grenzwert der Reihe und $s_n$ die Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{k+6}{k(k+1)}\,.$$

Geben Sie eine natürliche Zahl $n$ an, so dass der Abbruchfehler $|s_n - s|$ kleiner als 0.01 wird.

b) Im Rahmen einer längeren Rechnung benötigen Sie den Wert von $\cos(0.5)$. Ihr Pech: Sie haben nur einen ganz einfachen Taschenrechner mit den Grundoperationen $+, -, \times, :$. Ihr Glück: Eine Freundin hat Mathe II schon hinter sich und verrät Ihnen folgende Gleichung:

$$\cos(0.5) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(0.5)^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Begründen Sie, dass die Reihe konvergiert, und geben Sie einen Näherungswert $c$ für $\cos(0.5)$ an, der maximal um $2.5 \cdot 10^{-5}$ vom exakten Wert $\cos(0.5)$ abweicht, d.h.:

$$|\,c - \cos(0.5)\,| \;\leq\; 2.5 \cdot 10^{-5}\,.$$

**Aufgabe 4:** (3+3+2+2 Punkte)

a) (klausur 2006) Prüfen Sie, ob man den Parameter $a$ so wählen kann, dass die Funktion $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \ x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \ x \leq 0 \end{cases}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ A(x-3)+B & \text{für } x \in (0,3], \\ \ln(x^2-x-6) - \ln(x-3) & \text{für } x > 3, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-27} & : \ x \neq 3\,, \\ C & : \ x = 3\,. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{(x-3)^3} + x^2 & : \ x < 3\,, \\ D \cdot x + 2\sin(\frac{\pi}{2}x) & : \ x \geq 3\,. \end{cases}$$

Wie müssen die Zahlen $A$, $B$, $C$ und $D$ aus $\mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktionen $f$, $g$ und $h$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig werden.

**Abgabe und Besprechung:** während der Übungen vom 15.01.2018 bis 19.01.2018