Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Es sei i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ und

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \qquad z_2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\,.$$

a) Geben Sie die Polarkoordinaten von z_1, z_2 und z_3 an und markieren Sie die zugehörigen Punkte in einer Skizze der komplexen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie die Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen und markieren Sie auch diese in Ihrer Skizze.

$$z_4 = z_1 \cdot z_2, \qquad z_5 = z_3^2, \qquad z_6 = z_2^3$$

$$w_{0k} = i^{4k}, \qquad w_{1k} = i^{4k+1}, \qquad w_{2k} = i^{4k+2}, \qquad w_{3k} = i^{4k+3} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2: (2+ 4 +4 Punkte)

a) Es seien r und ϕ die Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wie lauten dann die Polarkoordinaten von $\frac{1}{z}$?

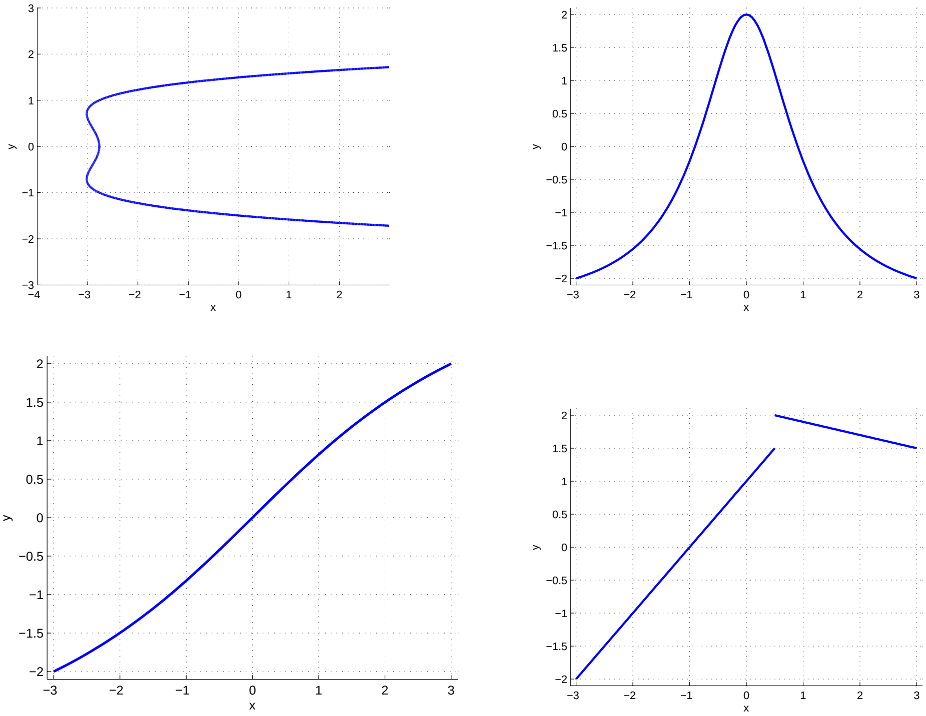
b) Skizzieren Sie die unten angegebenen Mengen D_1 und D_2 und bestimmen Sie deren Bilder unter der Abbildung

$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,, \qquad f(z) = \frac{1}{z}\,.$

i) $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) = 3\mathrm{Im}\,(z)\}$, ii) $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Aufgabe 3:

a) Bei welchen der folgenden Bilder kann es sich um die Darstellung des Graphen einer reellwertigen Funktion $f : [-3, 3] \to [-2, 2],\ x \mapsto y = f(x),$ handeln?

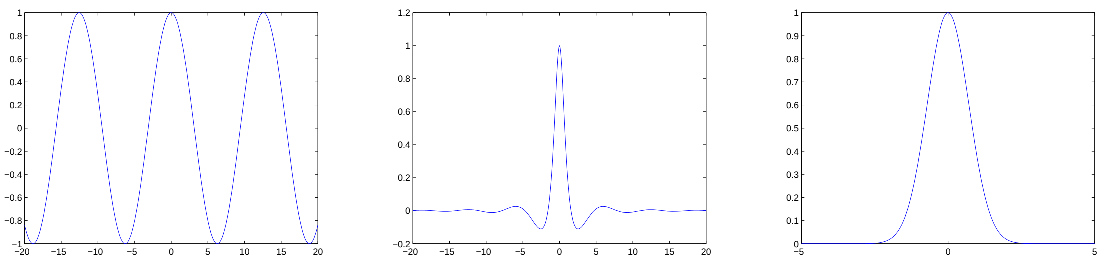


Welche der zugehörigen Funktionen sind - soweit erkennbar - injektiv bzw. surjektiv? Welche der zugehörigen Funktionen sind - soweit erkennbar - bijektiv (umkehrbar/invertierbar)?

b) In den untenstehenden Bildern sind die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \exp(-x^2) = e^{-x^2}, \qquad f_2(x) = \sin\left(\tfrac{x+\pi}{2}\right), \qquad \text{und} \qquad f_3(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

dargestellt. Welches Bild gehört zu welcher Funktion?



Aufgabe 4:

a) Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche sind ungerade?

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = 2x - 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

$$f_4 :]0, \frac{1}{10}[\to \mathbb{R} \qquad f_4(x) = (1-x)^4 - (1 - 4x + 6x^2)$$

b) Gesucht sind jeweils eine obere Schranke, eine untere Schranke, das Supremum, das Infimum, das Maximum und das Minimum der Werte der Funktionen f_1, f_2, f_3. Versuchen Sie diese, sofern sie existieren, ohne Kurvendiskussion bzw. Verwendung von Ableitungen zu bestimmen.

Hinweis: f_3 könnte Probleme bereiten!

c) In Aufgabe 2, Blatt 3 haben wir noch etwas unpräzise gefragt: Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für $x \in]0, \frac{1}{10}[$ den Term $(1-x)^4$ durch $1-4x+6x^2$ ersetzt?

In der Musterlösung heißt es: Für die angegebenen $x-$ Werte gilt

$$(1-x)^4 \in \left[1 - 4x\, ,\, 1 - 4x + 6x^2\right] =: I(x)$$

Der angegebene Näherungswert kann also vom exakten Werte nicht weiter entfernt sein als die Länge des Intervalls $I(x)$. Man hat also

$$\left|(1-x)^4 - (1 - 4x + 6x^2)\right| \le 6x^2 < 0.06 \quad \forall x \in]0, \frac{1}{10}[.$$

Handelt es sich bei 0.06 um das Maximum, das Supremum oder um eine obere Schranke für $\{|(1-x)^4 - (1 - 4x + 6x^2)| \,:\, x \in]0, \frac{1}{10}[\,\}$?