Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

a)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

b)
$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2\,.$$

Aufgabe 2:

Bei der Modellierung physikalischer Prozesse tauchen oft Terme der Form $(a-b)^n$ in der speziellen Konstellation auf, dass $|b|$ im Vergleich zu $|a|$ sehr klein ist. Setzt man $x = \frac{b}{a}$, so erhält man

$$(a-b)^n \;=\; a^n(1-x)^n$$

und kann in guter Näherung

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k\,, \qquad \text{mit } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

durch die ersten Summanden der Summe ersetzen.(Warum?)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall\, n \in \mathbb{N},\, n > 2,\, \forall\, x \in]0,1[$ folgende Einschließung gilt:

$$1 - nx \;<\; (1-x)^n \;<\; 1 - nx + \frac{1}{2}\,n(n-1)x^2$$

gilt.

Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für $x \in]0, \frac{1}{10}[$ den Term $(1-x)^4$ durch $1 - 4x + 6x^2$ ersetzt?

Aufgabe 3:

a) Beweisen oder widerlegen Sie (zum Beispiel mit Hilfe eines Gegenbeispiels) folgende Aussagen

(i) $\forall k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k}$.

(ii) $\forall k,\, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{k+1} \leq (n-k)\binom{n}{k}$.

b) Gegeben sei die Abbildung $f : D := \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \dfrac{1}{(2n)!}\dbinom{n}{2}$.

Zeigen Sie, dass $\forall n \in D : \dfrac{f(n+1)}{f(n)} \leq \dfrac{1}{2}$ gilt.

Aufgabe 4:

a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $a \neq \pm b$. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich

$$\left(\frac{a}{b^2 - ab} + \frac{b}{ab - a^2}\right) \cdot \frac{ab^3 - a^3 b}{(a+b)^2}.$$

b) Es sei i die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ und $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$. Berechnen Sie die (kartesische Darstellung der) folgenden komplexen Zahlen.

$$\bar{z}_1, \quad \bar{z}_2, \quad \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2}, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2}, \quad \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 \cdot \bar{z}_1}.$$

Abgabe und Besprechung: während der Übungen vom 20.11 bis 24.11.2017