

ANALYSIS I

J. Behrens

17.01.2017

① Tangente und Normale:

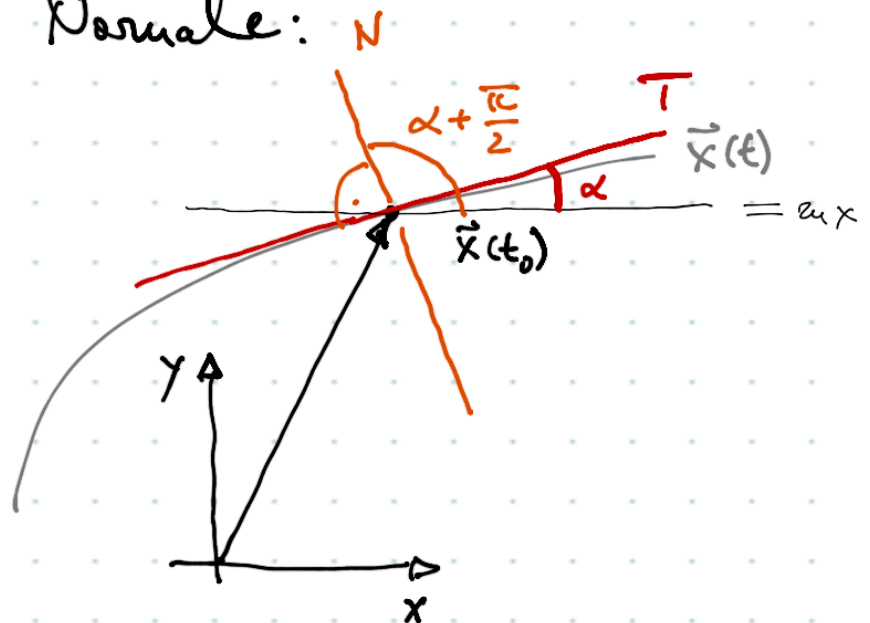
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Aufstieg von T in der
x-y-Ebene:

$$\tan \alpha$$

Aufstieg von N in x-y-Ebene entsprechend

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$



② Bogenlänge einer Kurve

Schritt:

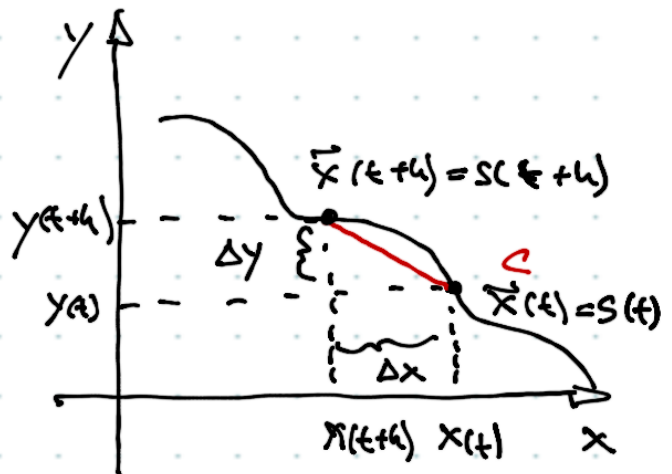
$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Länge des Kurvenbogens:

$$\Delta s \neq c$$

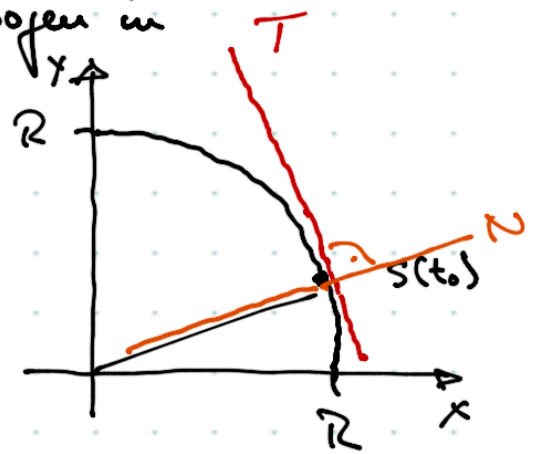
$$c \approx \Delta s \quad \text{falls } h \rightarrow 0 \quad \text{oder } s(t) \rightarrow s(t+h)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right)^2 + \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \end{aligned}$$



Beispiel: gegeben der Viertelkreisbogen in
Parameterform

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



• Differential der Bogenlänge:

$$ds = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R dt$$

• Tangentenvektor:

$$\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} -R \sin t_0 \\ R \cos t_0 \end{pmatrix}$$

• Normalenvektor:

$$\vec{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -R \cos t_0 \\ -R \sin t_0 \end{pmatrix}$$

• Gleichungen für T und N:

$$T: x \cos t_0 + y \sin t_0 = R$$

$$N: -x \sin t_0 + y \cos t_0 = 0$$

ANALYSIS I

19.01.2017

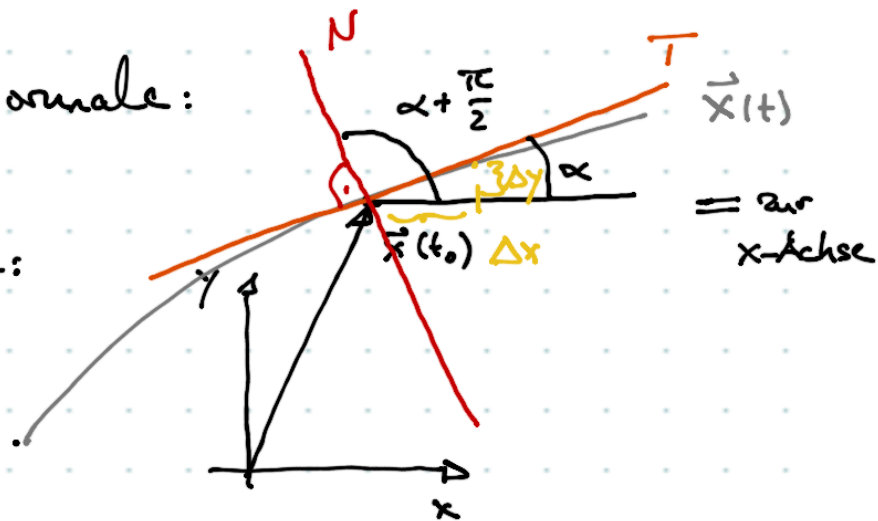
① Tangente und Normale:

Anstieg von T in x - y -Ebene:

$$\tan \alpha$$

Anstieg von N in x - y -Ebene:

$$\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$



② Bogenlänge einer Kurve:

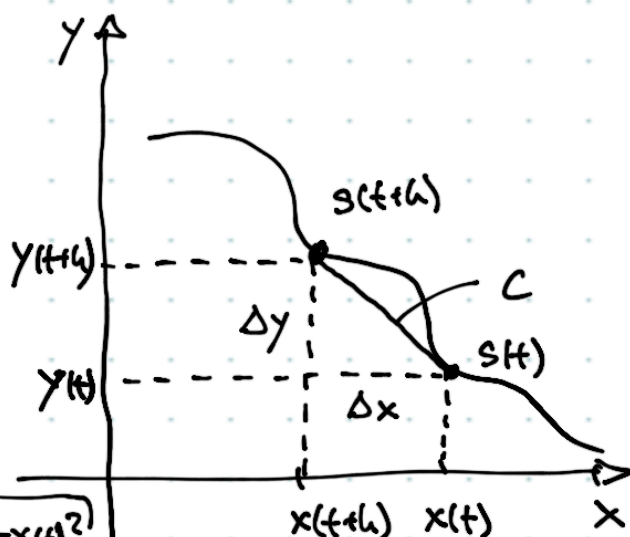
$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

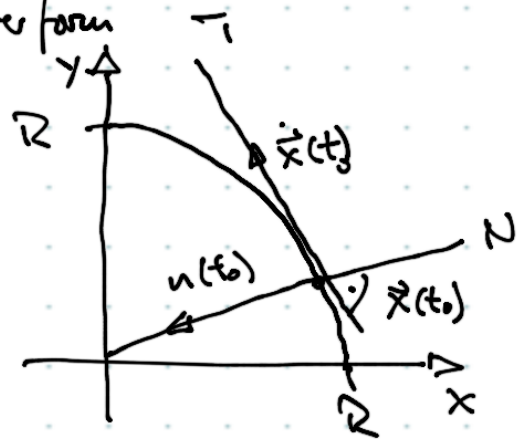
$$= \sqrt{\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$



Beispiel : Viertel Kreisbogen in Parameterform
gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= R \cos t \\ y(t) &= R \sin t \end{aligned} \right\} t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



- Differential der Bogenlänge :

$$ds = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R dt$$

- Tangentenvektor : $\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} -R \sin t_0 \\ R \cos t_0 \end{pmatrix}$

- Normalenvektor : $n(t_0) = \begin{pmatrix} -R \cos t_0 \\ -R \sin t_0 \end{pmatrix}$

- Gleichungen für T und N:

$$T: \quad x \cos t_0 + y \sin t_0 = R$$

$$N: \quad -x \sin t_0 + y \cos t_0 = 0$$