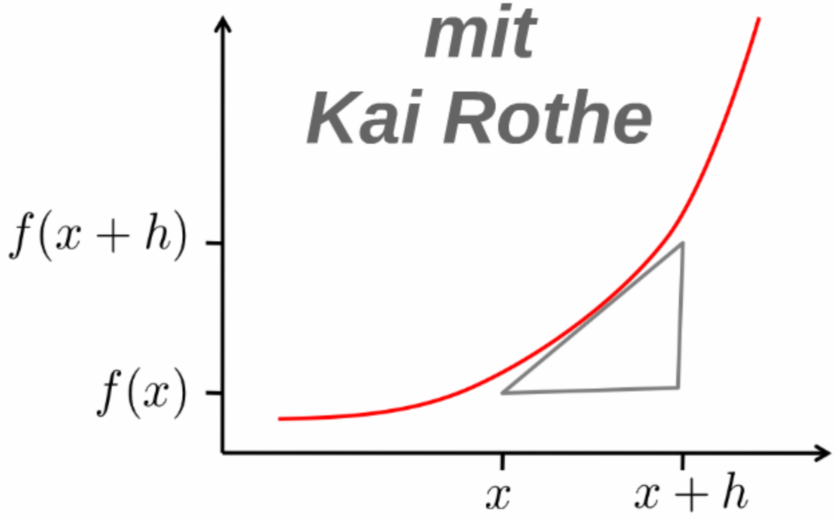
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Taylor-Entwicklung

Buch Kapitel 2.9

Polynome

Polynom

Erinnerung: Polynom

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0:n} a_k x^k \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Frage: Wie auswerten?

Horner Schema

Beobachtung:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= x(x(\cdots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
$+$		$b_n x_0$	$\cdots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0 *$	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\cdots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0).$

Horner Schema

Satz: Sei $p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$ Polynom. Sei weiter $b_n = a_n$, $b_j = a_j + b_{j+1} x_0$ für $k = (n-1) : -1 : 0$ (d.h. $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$), und $g(x) = \sum_{k=0:n-1} b_{k+1} x^k$. Dann gilt für $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}.$$

1

Polynom

Erinnerung: Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$$
$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Frage: Wie auswerten?

Horner Schema

Beobachtung:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 \\
&= x(x(\cdots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_1) + a_0.
\end{aligned}
$$

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
$+$		$b_n x_0$	$\dots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
x_0*	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\cdots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0)$.

Beispiel

Beispiel: $n = 4$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x(x(x(a_4 x + a_3) + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Idee: Rekursives Berechnungsschema für die Berechnung von $p_4(x_0)$.

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 \\ b_3 &= a_3 + b_4 x_0 \\ b_2 &= a_2 + b_3 x_0 \\ b_1 &= a_1 + b_2 x_0 \\ b_0 &= a_0 + b_1 x_0 = p_4(x_0) \end{aligned}$$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$+$		$b_4 x_0$	$b_3 x_0$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0 *$	$b_4 \nearrow$	$b_3 \nearrow$	$b_2 \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = q(x_0)$

Horner Schema

Beobachtung:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0 \\ &= x(x(\cdots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
$+$		$b_n x_0$	$\dots$	$b_2 x_0$	$b_1 x_0$
$x_0 *$	$b_n = a_n \nearrow$	$b_{n-1} \nearrow$	$\cdots \nearrow$	$b_1 \nearrow$	$b_0 = p(x_0)$.

Horner Schema

Satz: Sei $p(x) = \sum_{k=0:n} a_k x^k$ Polynom. Sei weiter $b_n = a_n$, $b_j = a_j + b_{j+1} x_0$ für $k = (n-1) : -1 : 0$ (d.h. $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$), und $g(x) = \sum_{k=0:n-1} b_{k+1} x^k$. Dann gilt für $x \neq x_0$

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = g(x) + \frac{b_0}{x - x_0}.$$

Polynom-Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt ($k = 0 : n$):

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Satz: Jedes Polynom $p_n(x)$ lässt sich für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ darstellen:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0:n} a_k(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Es gilt $(k = 0 : n)$:

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Taylor Polynom

Vorbemerkung

Beobachtung: Falls $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für $k = 0 : n$.

Interpretation: $T_n(x)$ ist ein Polynom, das an der Stelle $x = x_0$ mit f allen Ableitungen (bis zur n-ten Ordnung) übereinstimmt.
Dieses Polynom ist das einzige mit diesen Eigenschaften.

Definition

Definition:

- Das Polynom

  $$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

  heißt Taylor-Polynom n-ten Grades für die Funktion f.
- x_0 heißt dann die Entwicklungsstelle.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Restglied

Wenn $f(x) \approx T_n(x)$, dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Frage: wie groß ist $R_n(x)$?

Im Allgemeinen: $R_n(x)$ hängt von f und x_0 ab.

Satz: S

Vorbemerkung

Beobachtung: Falls $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ist, und falls

$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

so ist

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

für $k = 0 : n$.

Interpretation: $T_n(x)$ ist ein Polynom, das an der Stelle $x = x_0$ mit f allen Ableitungen (bis zur n-ten Ordnung) übereinstimmt.
Dieses Polynom ist das einzige mit diesen Eigenschaften.

Definition

Definition:

- Das Polynom
$$T_n(x) := \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$
heißt Taylor-Polynom n-ten Grades für die Funktion f.
- x_0 heißt dann die Entwicklungsstelle.
- Die Kurven $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Restglied

Wenn $f(x) \approx T_n(x)$, dann kann man den Fehler ausdrücken als

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Frage: wie groß ist $R_n(x)$?

Im Allgemeinen: $R_n(x)$ hängt von f und x_0 ab.

Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt Taylor-Formel mit dem Restglied $R_n(x)$ in der Schlömilch-Form.

Bemerkungen:

- Interessant ist oft vor allem die Form des Restgliedes $R_n(x)$.
- $|R_n(x)|$ gibt den Fehler bei der Approximation $T_n(x) \approx f(x)$ an. Wünschenswert ist obere Schranke, unabhängig von ξ.
- Häufig verwendet man die Lagrange-Form von $R_n(x)$ $(p = n + 1)$ für die Abschätzung:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}, \quad (0 < \theta < 1).$$

- Der Spezialfall der Taylor-Formel für $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad \text{mit } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

heißt McLaurin-Formel.

Beispiel

McLaurin-Formel für sin(x)

Beispiel: Sei $y = f(x) = \sin x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$$
$$f^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2})$$

Für gerade $k = 2\nu$ bzw. ungerade $k = 2\nu + 1$ gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^{\nu}.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

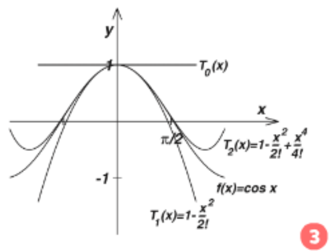
$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) &= \sum_{\nu=0:n} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!)} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!)}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0:n} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!)} + R_{2n+2}(x)$$

mit

$$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!)} \sin(\theta x).$$



3

McLaurin-Formel für sin(x)

Beispiel: Sei $y = f(x) = \sin x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$$
$$f^{(k)}(0) = \sin(k\frac{\pi}{2})$$

Für gerade $k = 2\nu$ bzw. ungerade $k = 2\nu + 1$ gilt also

$$f^{(2\nu)}(0) = 0, \text{ bzw. } f^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^{\nu}.$$

Das Taylor-Polynom ist dann gegeben durch

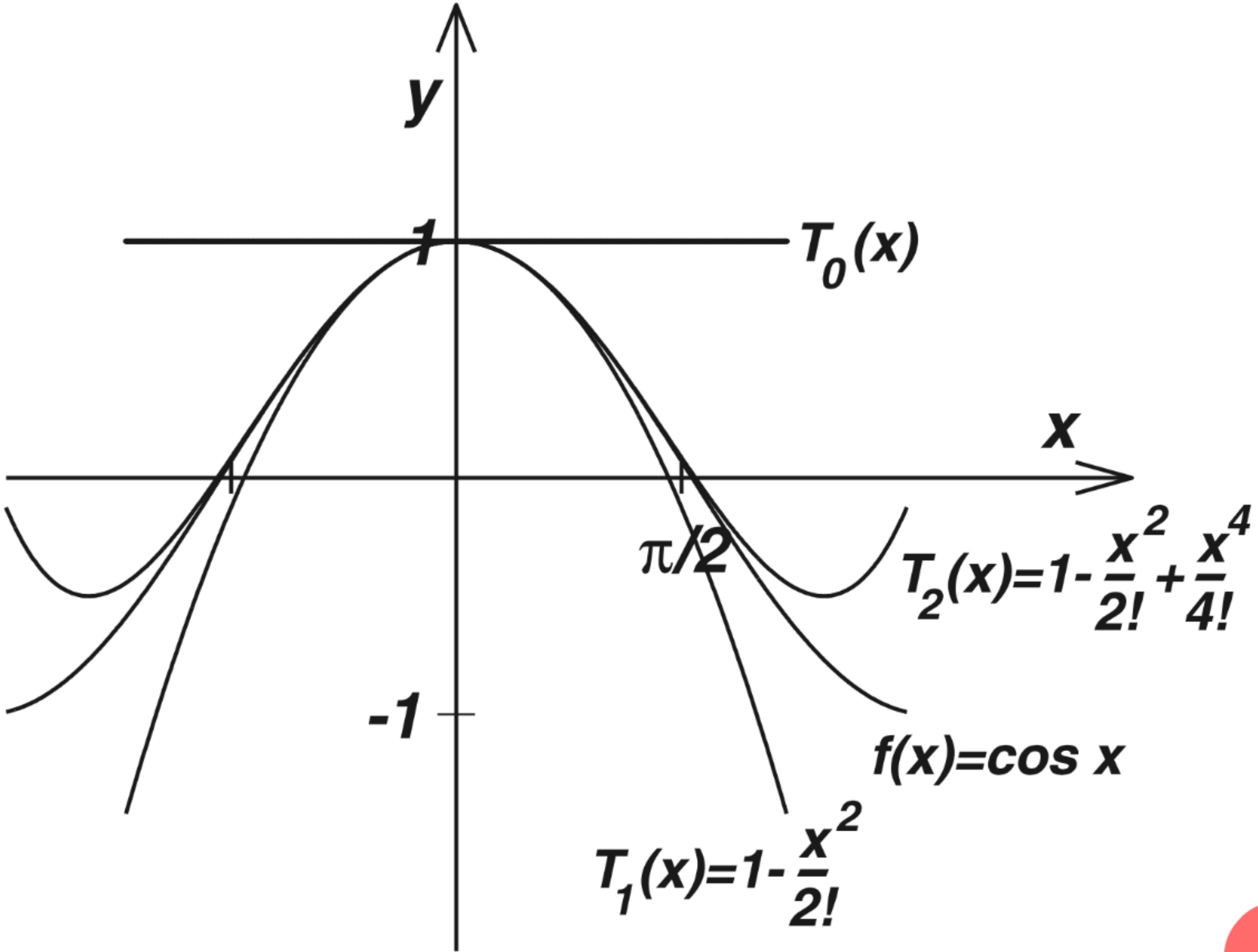
$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) &= \sum_{\nu=0:n} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!)} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!)}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sin x = \sum_{\nu=0:n} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!)} + R_{2n+2}(x)$$

mit

$$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!)} \sin(\theta x).$$

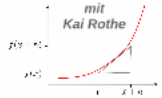


3

Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Taylor-Entwicklung

Buch Kapitel 2.9

Polynome

Polynom

Horner Schema

Frage: Wie auswerten?

Horner Schema

Polynom-Entwicklung

Polynomdarstellung mit einer Entwicklungsstelle

Taylor Polynom

Satz von Taylor

Beispiel

McLaurin-Formel für sin(x)