

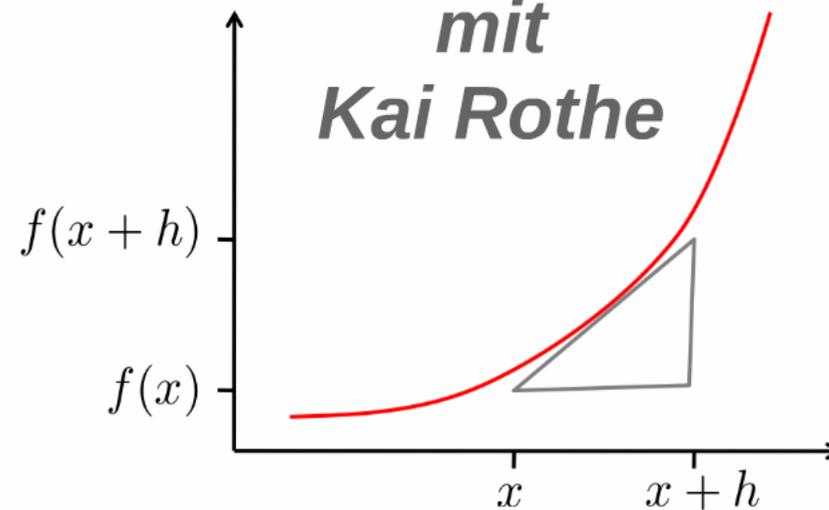
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Grenzwerte

Buch Kapitel 2.4

Motivation

Nullstellen

Häufige Problemstellung: Finde $x \in I$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,
- $I = [a, b] \in \mathbb{R}$.

Definition: Diejenigen $x \in I$ mit $f(x) = 0$ nennt man **Nullstellen**.

Beispiel

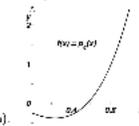
Polynom: Folgende Gleichung ergibt sich aus Standfestigkeitsberechnung:

$$p_4(x) = x^4 + x^3 + 1.662 \cdot x^2 - x - 0.25 = 0.$$

Gesucht: Lösungen im Intervall $I = [0, 1]$.

Lösbarkeit:

- In \mathbb{C} ist die Gleichung immer lösbar (Fundamentalsatz der Algebra).
- In \mathbb{R} nicht garantiert, also Versuch einer Näherung:
 - Betrachte Intervallgrenzen: $p_4(0) = -0.25 < 0$ und $p_4(1) = 3.112 > 0$.
 - Wenn Funktion *ununterbrochen*, dann muss $p_4(x) = 0$ existieren.
 - Idee: Halbiere das Intervall und schaue weiter.



Algorithmus

Intervallhalbierungsverfahren: Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, stetig (noch zu definieren), und gilt $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, so kann man mit folgenden Schritten eine Nullstelle von f approximieren:

Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und sei $\epsilon > 0$ eine Toleranz.

1. Halbiere das Intervall: $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Berechne $f(c)$.
 - Falls $|f(c)| < \epsilon$, so ist die gesuchte Nullstelle gefunden. ENDE.
 - Falls $|f(c)| > \epsilon$, dann setze:

$$\begin{cases} a \leftarrow a, b \leftarrow c, & \text{falls } f(c) > 0, \\ a \leftarrow c, b \leftarrow b, & \text{falls } f(c) < 0. \end{cases}$$

Gehe zu 1.

sis I

11.04.17
Strom
Ethe
werte
2017.1

Definit

- D
- E
- ϵ
- I
- w
- x
- U
- a
- ei

Nullstellen

Häufige Problemstellung: Finde $x \in I$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,
- $I = [a, b] \in \mathbb{R}$.

Definition: Diejenigen $x \in I$ mit $f(x) = 0$ nennt man **Nullstellen**.

Beispiel

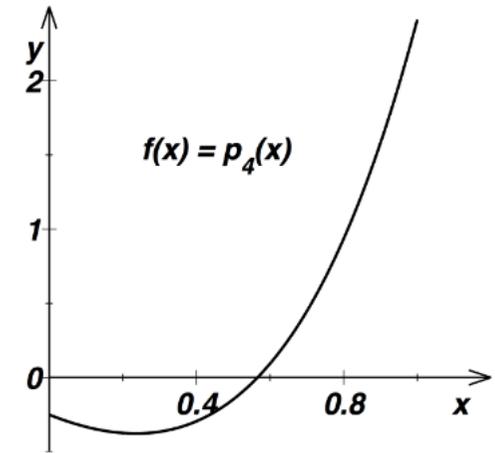
Polynom: Folgende Gleichung ergibt sich aus Standfestigkeitsberechnung:

$$p_4(x) = x^4 + x^3 + 1.662 \cdot x^2 - x - 0.25 = 0.$$

Gesucht: Lösungen im Intervall $I = [0, 1]$.

Lösbarkeit:

- In \mathbb{C} ist die Gleichung immer lösbar (Fundamentalsatz der Algebra).
- In \mathbb{R} nicht garantiert, also Versuch einer Näherung:
 - Betrachte Intervalgrenzen: $p_4(0) = -0.25 < 0$, und $p_4(1) = 2,412 > 0$.
 - Wenn Funktion *ununterbrochen*, dann muss $p_4(x) = 0$ existieren.
 - Idee: Halbiere das Intervall und suche weiter.



Algorithmus

Intervallhalbierungsverfahren: Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, stetig (noch zu definieren), und gilt $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, so kann man mit folgenden Schritten eine Nullstelle von f approximieren:

Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und sei $\epsilon > 0$ eine Toleranz.

1. Halbiere das Intervall: $c = \frac{a+b}{2}$.

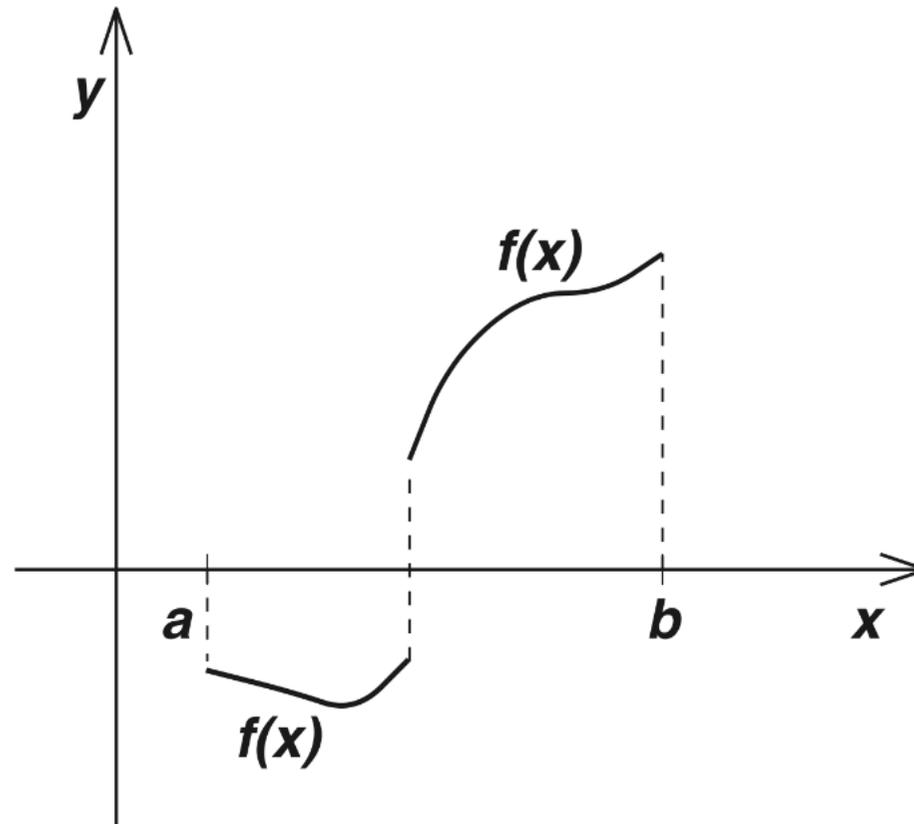
2. Berechne $f(c)$.

- Falls $|f(c)| < \epsilon$, so ist die gesuchte Nullstelle gefunden. ENDE.
- Falls $|f(c)| > \epsilon$, dann setze:

$$\begin{cases} a \leftarrow a, b \leftarrow c, & \text{falls } f(c) > 0, \\ a \leftarrow c, b \leftarrow b, & \text{falls } f(c) < 0. \end{cases}$$

Gehe zu 1.

Voraussetzung für die Funktion



Funktion darf nicht springen!

Grenzwert

Grenzwert

Definition: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Definitionen

Definition: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt **δ -Umgebung** von x_0 .
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine **ϵ -Umgebung** von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt **offene Menge** in \mathbb{R} , wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt **Randpunkt**, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\tilde{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt **Häufungspunkt** von D , wenn in jeder δ -Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a$, $x \in D$, existiert.

①

②

Links-/Rechtsseitiger Grenzwert

Definition: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt **linksseitiger** (rechtsseitiger) **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$ mit $x < a$ ($x > a$) gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der linksseitige (rechtsseitige) Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ($g = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$) bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ existiert genau dann, wenn der $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

③

Uneigentlicher Grenzwert

Vorbemerkung: Für $x \rightarrow +\infty$ oder $f(x) \rightarrow +\infty$ muss die Distanz im Maßstab variieren!

Definition: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Die Funktion f hat einen **uneigentlichen Grenzwert**, geschrieben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, falls gilt: Zu jedem (beliebig großen) $\Phi > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x - a| < \delta$

$$f(x) > \Phi.$$

④

Definitionen

Definition: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$.

- Die Menge $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$ heißt **δ -Umgebung** von x_0 .
- Entsprechend ist $U_\epsilon(f(x_0)) = \{f(x) \in \mathbb{R} : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\}$ eine **ϵ -Umgebung** von $f(x_0)$.
- $D \subset \mathbb{R}$ heißt **offene Menge** in \mathbb{R} , wenn zu jedem $x \in D$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $U_\delta(x) \subset D$.
- $x \in \mathbb{R}$ heißt **Randpunkt**, falls x nicht innerer Punkt und es gilt: In jeder Umgebung $U_\delta(x)$ gibt es mindestens ein $\bar{x} \in D$ und ein $\tilde{x} \notin D$.
- a heißt **Häufungspunkt** von D , wenn in jeder δ -Umgebung $U_\delta(a)$ mindestens ein $x \neq a, x \in D$, existiert.

Grenzwert

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bezeichnet.

Bemerkung:

- a muss nicht Element des Definitionsbereichs der Funktion sein.
- g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion sein.

Links-/Rechtsseitiger Grenzwert

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D . Ein Wert $g \in \mathbb{R}$ heißt **linksseitiger** (rechtsseitiger) **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle a , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$ mit $x < a$ ($x > a$), gilt:

$$|f(x) - g| < \epsilon.$$

Der linksseitige (rechtsseitige) Grenzwert wird mit $g = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ ($g = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$) bezeichnet.

Bemerkung: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ existiert genau dann, wenn der $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x \searrow a} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

③

Uneigentlicher Grenzwert

Vorbemerkung: Für $x \rightarrow \infty$ oder $f(x) \rightarrow \infty$
muss die Definition modifiziert werden!

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt in D .
Die Funktion f hat einen **uneigentlichen Grenzwert**, geschrieben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,
falls gilt: Zu jedem (beliebig großen) $\Psi > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x
mit $|x - a| < \delta$

$$f(x) > \Psi.$$

Rechnen mit Grenzwerten

Grenzwertsätze

Satz: Betrachte für die folgenden Regeln jeweils einen der Fälle:

$$x \rightarrow a, \quad x \nearrow a, \quad x \searrow a, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Setze voraus, dass die jeweiligen Grenzwerte existieren, dann gelten:

1. $\lim(f + g) = \lim f + \lim g,$
2. $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g,$
3. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g},$ falls $\lim g \neq 0,$
4. $f \leq g \Rightarrow \lim f \leq \lim g,$
5. $f \leq g \leq h$ und $\lim f = \lim h = y \Rightarrow \lim g = y.$

Konvergenzordnung

Definition: Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|x - a|^k} = c > 0.$$

Dann **verschwindet** $f(x)$ für $x \rightarrow a$ von der Ordnung k . Schreibe auch

$$f(x) = O(|x - a|^k) \text{ für } x \rightarrow a.$$

Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \cdot |x - a|^k = c > 0.$$

Dann **geht** $f(x)$ für $x \rightarrow a$ von der Ordnung k gegen ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x - a|^{-k}) \text{ für } x \rightarrow a.$$

⑤

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen

Satz: Sei $f(x) = O(|x - a|^\alpha)$ und $g(x) = O(|x - a|^\beta)$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ falls } \alpha > \beta \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ falls } \alpha < \beta.$$

Sei $f(x) = O(|x - a|^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ und $g(x) = O(|x - a|^\beta)$ mit $\beta < 0$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Grenzwertsätze

Satz: Betrachte für die folgenden Regeln jeweils einen der Fälle:

$$x \rightarrow a, \quad x \nearrow a, \quad x \searrow a, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Setze voraus, dass die jeweiligen Grenzwerte existieren, dann gelten:

1. $\lim(f + g) = \lim f + \lim g,$
2. $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g,$
3. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g},$ falls $\lim g \neq 0,$
4. $f \leq g \Rightarrow \lim f \leq \lim g,$
5. $f \leq g \leq h$ und $\lim f = \lim h = y \Rightarrow \lim g = y.$

Bemerkungen: Die Regeln gelten analog auch für unbestimmte Grenzwerte.

1. $\infty - \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty + \infty = \infty$ sei vereinbart.

2. $0 \cdot \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty \cdot +\infty = +\infty$ sei vereinbart.

3. $\frac{\infty}{\infty}$ sei ausgeschlossen, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$ sei vereinbart.

Im Falle weiterer Unbestimmtheit können die Sätze nicht angewandt werden.

Bemerkungen: Die Regeln gelten analog auch für unbestimmte Grenzwerte.

1. $\infty - \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty + \infty = \infty$ sei vereinbart.

2. $0 \cdot \infty$ sei ausgeschlossen, $\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$ sei vereinbart.

3. $\frac{\infty}{\infty}$ sei ausgeschlossen, $\frac{0}{\pm\infty} = 0$ sei vereinbart.

Im Falle weiterer Unbestimmtheit können die Sätze nicht angewandt werden.

Konvergenzordnung

Definition: Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|x - a|^k} = c > 0.$$

Dann **verschwindet** $f(x)$ für $x \rightarrow a$ **von der Ordnung** k . Schreibe auch

$$f(x) = O(|x - a|^k) \text{ für } x \rightarrow a.$$

Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \cdot |x - a|^k = c > 0.$$

Dann **geht** $f(x)$ für $x \rightarrow a$ **von der Ordnung** k **gegen** ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x - a|^{-k}) \text{ für } x \rightarrow a.$$

Konvergenzordnung für unbestimmte Grenzwerte

Analog: Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^k |f(x)| = c > 0.$$

Dann **verschwindet** $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ **von der Ordnung** k . Schreibe auch

$$f(x) = O(|x|^{-k}) \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (oder $-\infty$) und es gebe $k > 0$, so dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|^k} = c > 0.$$

Dann **geht** $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ **von der Ordnung** k **gegen** ∞ (oder $-\infty$). Schreibe auch

$$f(x) = O(|x|^k) \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

Analoges gilt für $x \rightarrow -\infty$.

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen

Satz: Sei $f(x) = O(|x - a|^\alpha)$ und $g(x) = O(|x - a|^\beta)$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ falls } \alpha > \beta \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty, \text{ falls } \alpha < \beta.$$

Sei $f(x) = O(|x - a|^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ und $g(x) = O(|x - a|^\beta)$ mit $\beta < 0$. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Motivation

Nullstellen

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Beispiel

Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Algorithmus

1. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Grenzwert

Grenzwert

Die Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 6$ hat den Grenzwert L für $x \rightarrow a$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Definitionen

Die Funktion $f(x)$ hat den Grenzwert L für $x \rightarrow a$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Links-Rechtsseitiger Grenzwert

Die Funktion $f(x)$ hat den links-rechtsseitigen Grenzwert L für $x \rightarrow a$, wenn $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Uneigentlicher Grenzwert

Die Funktion $f(x)$ hat den uneigentlichen Grenzwert L für $x \rightarrow a$, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Rechnen mit Grenzwerten

Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze besagen, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ implizieren $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$.

Konvergenzordnung

Die Konvergenzordnung besagt, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ implizieren $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.

Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen

Die Grenzwerte in Abhängigkeit von Ordnungen besagen, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ implizieren $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$.