Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

19. Januar 2016

Notizen

Wir wissen: f 2mal diffbar bei x_0, so gibt es "gutes" quadratisches Modell

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x).$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

Was, falls f n-mal diffbar bei x_0? Analog zu $n=2$ vorgehen. Damit ergibt sich lokal bei x_0

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{=: T_n(x)} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

$T_n(x)$: n-tes Taylor Polynom von f bei x_0!

Wie sieht $R_n(x)$ aus? Im Fall f $(n+1)$-mal stetig diffbar wissen wir

Notizen

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}$$ Restglied in Schlömilch Form

mit einem ξ zwischen x und x_0, wobei $p \in \{1,\dots,n+1\}$

$p=1$ $\quad R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)(x-\xi)^n\,\frac{1}{n!}$ Cauchy Form

$\xi = x_0 + \Theta(x-x_0)$, $\Theta \in (0,1)$ $\quad \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))\,(x-x_0)^{n+1}(1-\Theta)^n$

$p = n+1$ $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Lagrange Form des Restglieds

Wird gewählt, wenn wir nichts anderes sagen

Konsequenz: Fehlerabschätzung $|f(x)-t_n(x)| \le |R_n(x)| \le \dots$

Notizen

$$\leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x-x_0|^{n+1} \leq \max_{z \in \mathcal{D}(f)} \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$$

<u>Bsp</u> $f(x) = e^x$. Dann $f^{(l)}(x) = e^x \quad \forall_{l \in \mathbb{N}}$

Sei $x_0 := 0$

$$e^x = t_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x$$

mit $$t_n(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n}_{\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}}$$

Fehlerabschätzung

$$|e^x - t_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad \text{weil } |x| \geq |\xi|$$

Notizen

$\rightarrow$ $|e^x - t_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$ für jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R}$, Wow!

denn $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$ für fest gewähltes x, weil:

Sei $|x| \in \mathbb{R}_+$. Dann gibt es $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell - 1 \le |x| < \ell$

Dann für n groß genug

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x| \cdots |x|}{1 \cdot 2 \cdots (\ell-1)\,\ell \cdots n+1} \le \frac{|x|^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \, \frac{|x|^{n+1-\ell}}{\underbrace{\ell \cdot \ell \cdot \ell \cdots \ell}_{n+1-\ell \text{ mal}}}$$

$$= \frac{|x|^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \Big(\underbrace{\frac{|x|}{\ell}}_{<1} \Big)^{n+1-\ell} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Analoge Modelle für $\sin x$, $\cos x$

$$\cos x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}}_{t_{2n}(x)} + \underbrace{\frac{1}{(2n+2)!} (-1)^{n+1} \cos(\xi)\, x^{2n+2}}_{= R_{2n+2}(x)}$$

weil $\xi = \xi(x)$ mit ξ zwischen 0 und x

Notizen

$$\sin x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{t_{2n+1}(x)} + \underbrace{\frac{1}{(2n+3)!} (-1)^{n+1} \sin(\xi)\, x^{2n+3}}_{R_{2n+3}(\xi)\ \equiv\ R_{2n+3}(x),\ \text{weil } \xi = \xi(x)} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } \bar{x} \text{ und } x.$$

Damit
$$|\cos x - t_{2n}(x)| \to 0 \quad (n \to \infty), \quad x \text{ fix}$$
$$|\sin x - t_{2n+1}(x)| \to 0 \quad (n \to \infty), \quad x \text{ fix}.$$

Extremalstellen-Charakterisierung bei diffbaren Funktionen.

Sei x_0 lokale Minimal (Maximalstelle) von $f: I \to \mathbb{R}$, d.h. mit einem $\varepsilon > 0$ gilt
$$f(x_0) \le (\ge)\ f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I$$
Ist f diffbar in x_0, so gilt
$$f'(x_0)(x - x_0) \ge (\le)\ 0 \quad \forall x \in I, \qquad I = [a,b]$$

Notizen

Denn bei einer Minimalstelle x_0 gilt mit $x = x_0 + \lambda(x - x_0)$

$$0 \leq f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \lambda(x-x_0)) - f(x_0)$$

$\rightarrow$ mit $\lambda > 0$ gilt $0 \leq \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda(x-x_0)) - f(x_0)}{\lambda} = f'(x_0)(x - x_0)$

Ist $x_0 \in (a,b)$, so folgt $f'(x_0) = 0$

Ist x_0 Maximalstelle, verfahre analog

x_0 lokale Extremalstelle und $x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingungen für lokale Mini (Maxi) malität; sei f 2 x stetig diffbar in $B_\varepsilon(x_0) \cap I$. Es gelte

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \underset{(<)}{>} 0$. Dann ist x_0 lokale Minimal stelle (Maximal)

Universität Hamburg

Notizen

Denn es gilt bei x_0: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{= 0 \text{ n. Vor.}}(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^3$

mit ξ zwischen x_0 und x

$$\longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) = \overbrace{\frac{1}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{>0} (x-x_0)^2} > 0 \text{ bei } x_0$$

für x nah genug bei x_0, d.h. $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I$,

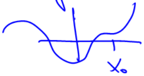
also $f(x) > f(x_0)$ für $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I$.

Jetzt gelte f 3-mal stetig diffbar und

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0$$

Dann liegt bei x_0 ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente vor, denn

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\equiv 0} + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi)(x-x_0)^3,$$



Notizen

d.h. bei x_0 sieht f aus wie $(x-x_0)^3$.

Diese Aussagen sind verallgemeinerbar: f n mal stetig diffbar mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ist dann

n gerade, so ist bei x_0 lokales Extremum $\left(\begin{array}{ll} f^{(n)}(x_0) > 0 & \text{Min} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{Max} \end{array} \right)$

n ungerade, so ist bei x_0 Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Konvexität und Ableitungen. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar.

Dann ist f konvex $\Longleftrightarrow$

a) $f(x) - f(y) - f'(x)(y-x) \geq 0 \quad \forall y,x \in (a,b)$

oder b) $(f'(x) - f'(y))(y-x) \geq 0 \quad \forall y,x \in (a,b)$, d.h. f' monoton wachsend!

Notizen

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 2mal diffbar.

Dann ist f konvex $\Longleftrightarrow$ $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

Zur Erinnerung: f konvex, falls $f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x)+\lambda(f(y)-f(x))$

für alle $x,y\in(a,b)$ und $\lambda\in[0,1]$.

Konkavität von f ist Konvexität $(-f)$

Folgerung: $f''(x_0)=0$ und $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, so geht der Graph von f bei x_0 von

Links (Rechts) Kurve in eine Rechts (Links) Kurve über.

Solche Punkte heißen Wendepunkte.

Mit diesen Charakterisierungen können Sie Funktionen diskutieren, d.h. dann

Notizen

Kurvendiskussion

i.) Def. Bereich von f ?

ii) Verhalten von f gegen $\pm\infty$, Polstellen

iii) Nullstellen von f ?

iv.) Extremstellen

v.) Krümmungsverhalten von f mit 2ten Ableitungen

vi) Symmetrien, Bildbereich, Skizze!

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

21. Januar 2016

Notizen

Modellierung fortgesetzt; Sei f bei x_0 n-mal diffbar. Dann analog zum $n=1$ und $n=2$ ein "einfaches" polynomiales Modell für f bei x_0 angeben, d.h.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{=: t_n(x)} + R_n(x)$$

$=: t_n(x)$ Taylor Polynom n-ten Grades bei x_0.

mit $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Was wissen wir über R_n, falls etwa f $(n+1)$-mal stetig diffbar ist?

Dann gilt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p} (x-x_0)^p (x-\xi)^{n+1-p}$$

mit $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ und ξ zwischen x und x_0

Restglied in Schlömilch Form

Notizen

Spezialfälle $p=1$, $p=n+1$. Setze $\xi = x_0 + \Theta(x-x_0)$ mit $\Theta \in (0,1)$.

$p=1$: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\Theta)^n$ Cauchy Form

$p=n+1$: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Lagrange Form

wird gewählt, weil so schön einfach!

Bsp $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $f^{(k)}(x)=e^x$ ∞-oft diffbar

$$e^x = \underbrace{1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\dots+\tfrac{1}{n!}x^n}_{t_n(x)} + \underbrace{R_n(x)}_{\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad \text{mit } \Theta\in(0,1)$$

Damit ergibt sich als Modellfehler

$$|e^x - t_n(x)| = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{für } \underline{\text{jedes}} \text{ fest } x\in\mathbb{R}$$

Wow!

Notizen

Warum? Betrachte $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Wähle $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $\ell-1 \leq |x| < \ell$. Damit gilt $(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (\ell-1)\ell \cdots n \geq 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\ell-1)\ell\cdot \underbrace{\ell\cdot\ell\cdots\ell}_{n-(\ell-1)\text{ mal}}$

$$\rightarrow \quad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{|x|}{\ell}\right)^{n-(\ell-1)} \rightarrow 0 \quad (n\to\infty) \quad \text{weil } 0 \leq \frac{|x|}{\ell} < 1.$$

Analog erhält man für

$$\sin x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{t_{2n+1}(x)} + \frac{1}{(2n+3)!}(-1)^{n+1} x^{2n+3} \sin(\Theta x) \quad \text{mit } \Theta \in (0,1)$$

$$\cos x = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}}_{t_{2n}(x)} + \frac{1}{(2n+2)!}(-1)^{n+1} x^{2n+2} \cos(\Theta x) \quad \text{mit } \Theta \in (0,1)$$

Konsequenzen aus lokalen Modellen

Notizen

Charakterisierung lokaler Extremalstellen (= Minima oder Maxima) von f

Definition: x_0 heißt lokale Maximal (Minimal) Stelle von f, falls

$$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I \quad , \quad \text{wobei} \quad f: I \to \mathbb{R}, \; I = [a,b]$$

Analog zu globalen Extremalstellen können wir zeigen. $B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\}$

Sei x_0 lokale Extremalstelle. Dann gilt

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I \quad \text{bei einer lokalen Minimalstelle}$$

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0 \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I \quad \text{bei einer lokalen Maximalstelle.}$$

Nachweis für x_0 lokales Minimum gilt mit $x \in B_\varepsilon(x_0)$: $0 \leq f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)$ mit $\lambda \in (0,1)$

$$\longrightarrow \quad 0 \leq \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)}{\lambda} = f'(x_0)(x - x_0)$$

lokales Max analog

Notizen

Also für $x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0)=0$ für lokale Extremalstellen

Sei jetzt f 2mal stetig diffbar in $B_\varepsilon(x_0) \cap I$. Es gelte

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ $(<)$. Dann ist bei x_0 lokales Minimum (Maximum),

denn in der Nähe von x_0 (also in $B_\varepsilon(x_0) \cap I$) gilt mit linearem Modell

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$ mit ξ zwischen x und x_0

Wir wissen: $f''(x_0) > 0$ <u>und</u> f'' stetig $\Rightarrow$ $f''(\xi) > 0$ in der Nähe von x_0.

also: $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \underbrace{f''(\xi)(x-x_0)^2}_{>0}$ in $B_\varepsilon(x_0) \cap I$, ε klein genug

$\rightarrow$ x_0 lokales Min. Lokales Max analog.

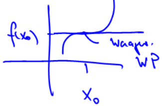
Notizen

Sei jetzt 3 mal stetig diffbar mit $f'(x_0) = 0 = f''(x_0)$, $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Dann ist bei x_0 ein waagerechter Wendepunkt, denn

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{=0} + \frac{1}{6} f^{(3)}(\xi)(x-x_0)^3$$

mit ξ zwischen x und x_0



Allgemein: $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Dann n gerade: bei x_0 Extremalstelle (Min oder Max)

n ungerade: bei x_0 Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

Erinnerung: $f'(x) \geq 0 \iff f$ monoton wachsend (siehe MWS)

Ableitungen und Konvexität: f konvex, falls $f(x+\lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y)-f(x))$ für $\lambda \in [0,1]$.

Notizen

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

i.) f diffbar in (a,b). Dann ist f konvex $\Leftrightarrow$

a.) $f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)\geq 0 \quad \forall x,y\in(a,b)$

oder b.) $(f'(y)-f'(x))(y-x)\geq 0 \quad \forall x,y\in(a,b)$ d.h. f' monoton wachsend

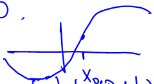
Idee: $f(x+\lambda(y-x))\leq f(x)+\lambda(f(y)-f(x)) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}}_{\substack{\lambda\to 0_+\\ \Longrightarrow\ f'(x)(y-x)}} \leq f(y)-f(x)$

ii.) f 2 mal diffbar in (a,b). Dann ist f konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

Dies folgt aus i.), weil mit f konvex ist f' monoton wachsend, also

$0\leq (f'(y)-f'(x))(y-x) = f''(\xi)(y-x)$. D.h. $f''\geq 0$.

Folgerung: $f''(x_0)=0$. Dann bei x_0 Wendepunkt



Übergang von Rechts (Links) nach Links (Rechts).

Notizen

Merke: Die 2te Ableitung beschreibt Näherungsweise die Krümmung des Graphen von f!

Mit diesen Hilfsmitteln können Funktionen diskutieren (Kurvendiskussion)

i.) Def Bereich von f ii) Verhalten für $x \to \pm\infty$, $x \to$ Polstellen

iii) Nullstellen von f iv) Extremstellen von f

v.) Krümmungsverhalten (Konvex, konkav) (f konkav $\Leftrightarrow$ $-f$ konvex)

vi) Symmetrien, vii) Bildbereich, viii) Skizze