Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2015/2016
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 7

Reihen II, Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

1/3.12.2015

Reelle Zahlenreihen

Wiederholung: Gegeben Zahlenfolge $(a_k)_{\in\mathbb{N}_0}$. Definiere neue Folge

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser **Partialsummen** wird

(unendliche) Reihe genannt.

Man sagt, die **Reihe konvergiere** genau dann wenn die Folge s_n konvergiert. Im Falle der Konvergenz, heißt

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \textbf{Grenzwert der Reihe.}$$

BEISPIEL: GEOMETRISCHE REIHE

Bekannt aus Vorlesung 1: Für eine feste reelle Zahl $q \neq 1$ gilt mit

Vorlesung 1

Vorlesung 5 / HÜ 4

$$a_k := q^k : \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ \infty & q>1 \end{cases}$$

divergent für $q \leq -1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1-0}{1-q} \quad \text{für} \quad |q|<1$$

sonst divergent

Die geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$.

mit $a_k := \frac{(-1)^k}{k+1}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad // \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent! Beweis: Cauchy-Kriterium

aber $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ divergent

Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

ist konvergent: Leibniz Kriterium

Konvergenz von $\sum_{k=}^{\infty} a_k$ $\not\Rightarrow$ Konvergenz von $\sum_{k=}^{\infty} |a_k|$

$\longrightarrow$ Absolut konvergente Reihen : Beamerfolie 48

Definition: eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{|a_k|}_{\geq 0}$

monoton steigend

$s_{n+1} = s_n + |a_{n+1}| \geq s_n$

Konvergenzkriterien: Beamerfolie 49

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ existiert

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{Folge } b_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ beschränkt}$$

Folge ist monoton steigend, also genau dann konvergent, wenn beschränkt

Aus Konvergenz $\Longrightarrow$ Beschränktheit (s. frühere Vorlesung) 5?

Beschränktheit + Monotonie $\Longrightarrow$ Konvergenz (Vorl. 5)

- **Majorantenkriterium: Folie 49**

Gegeben:

absolut konvergente Reihe $s_{\cancel{n}} := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und

$\sum^{\infty} |a_k|$ konverg.

Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist auch absolut konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |b_k|}_{\substack{\text{endlich viele} \\ =: C}} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \underbrace{|b_k|}_{\leq |a_k|}$$

$$\leq C + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|}_{\text{beschränkt}} \leq K$$

$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ beschränkt $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergent.

BEISPIEL: $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$$

$a = 1 \quad b = -1$

$$\frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ohne Pünktchen:

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} - \left(\underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} \right) - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$\frac{1}{n+1} \to 0$

Jetzt: $\quad s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} \quad (*)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{(k+1)^2}}_{b_k}$$

$$\overset{(*)}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{a_k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert $\Longrightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert $\Longrightarrow$ $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

Wie sieht es mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}, \; m > 2$

Bsp: $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergent

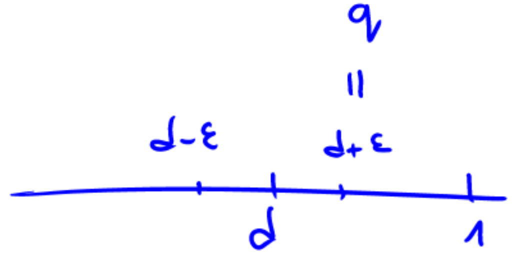
Analog $\sum^{\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}}$ oder $\sum^{\infty} \frac{1}{k^4}$ oder ...

Ohne Beweis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$

- **Quotientenkriterium: Beamerfolie 49**

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d \begin{cases} <1 & \Longrightarrow \text{ absolute Konvergenz} \\ >1 & \Longrightarrow \text{ Divergenz} \\ =1 & \Longrightarrow \text{ keine Aussage} \end{cases}$$

von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$



Beweis der ersten Aussage:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q < 1 \quad \text{für } k \ge n_0$$

$\underbrace{\frac{a_{k+1}}{a_k}}_{\cup}$ $k \ge n_0$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \Longleftrightarrow \underbrace{|a_{k+1}|}_{\text{Betrag} \le q \cdot \text{Betrag (Vorgänger)}} \le q\,\overbrace{|a_k|}^{\le q|a_{k-1}|} \le q \cdot q \cdot |a_{k-1}| \le \cdots \le \ldots \le q^{k-n_0+1} |a_{n_0}|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|}_{\substack{\text{endlich viele} \\ =: C}} + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| \le C + \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_{n_0}| q^{k-n_0} = C + |a_{n_0}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$= C + |a_{n_0}| \frac{1}{1-q}. \quad \text{falls } |q| < 1$$

- **Wurzelkriterium: Beamerfolie 49**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \text{für } k \text{ groß genug} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ konvergent.}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \Longleftrightarrow |a_k| \leq q^k$$

Beispiel:

Wir wissen (vgl. Folie 3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{5}}$$

und testen unsere Kriterien

$$a_k = \frac{2^k}{5^k}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{5^{k+1}}}{\frac{2^k}{5^k}} = \frac{2^{k+1}}{5^{k+1}} \cdot \frac{5^k}{2^k} = \frac{2^1}{5^1} = \frac{2}{5} = q < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe abs. konvergent nach Quotientenkriterium

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

wissen wir siehe oben

und testen wieder Quot. krit.

Wurzelkriterium $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{(2/5)^k} = 2/5 = q$

$q < 1 \Rightarrow$ abs. konv.

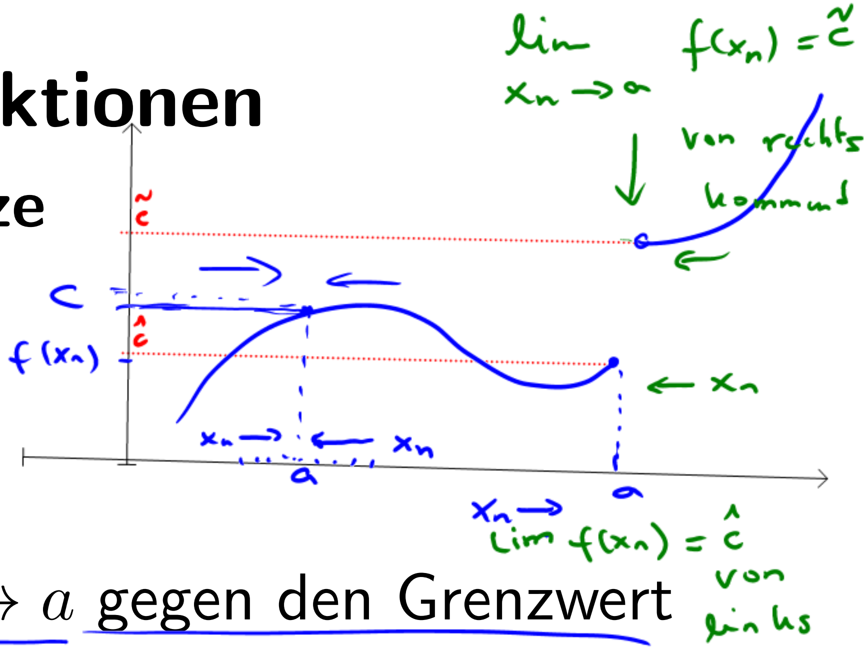
$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} \qquad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = a_{k+1} \cdot \frac{1}{a_k}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \underbrace{\frac{1}{\cancel{(k+1)}(k+2)}}_{a_{k+1}} \cdot \underbrace{\frac{k\cancel{(k+1)}}{1}}_{1/a_k} = \frac{k}{k+2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(1)}{\cancel{k}(1+\underbrace{\tfrac{2}{k}}_{\downarrow 0})} = 1 \Longrightarrow ?$$

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums ist kein Aussage möglich

Grenzwerte von Funktionen



Definition: Beamerfolie 50, Prof. Hinze

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$

Man sagt f(x) strebt/ konvergiert für $x \to a$ gegen den Grenzwert c und schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \,,$$

wenn für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$

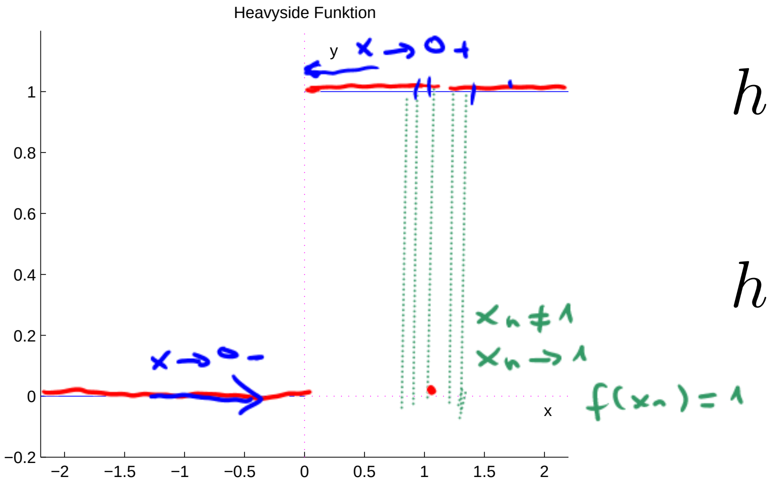
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c \qquad \text{gilt.}$$

Linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwerte

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = c\,.$$

$$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = c\,.$$

Beispiel 1:



$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

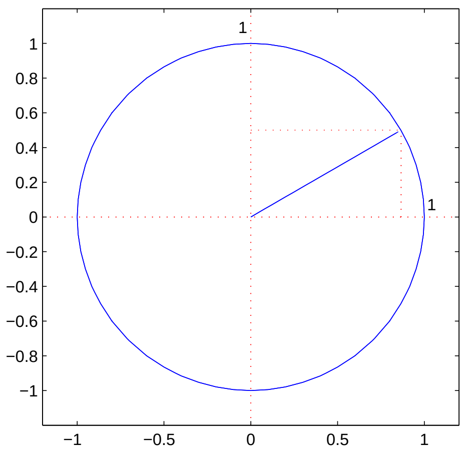
$$h(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

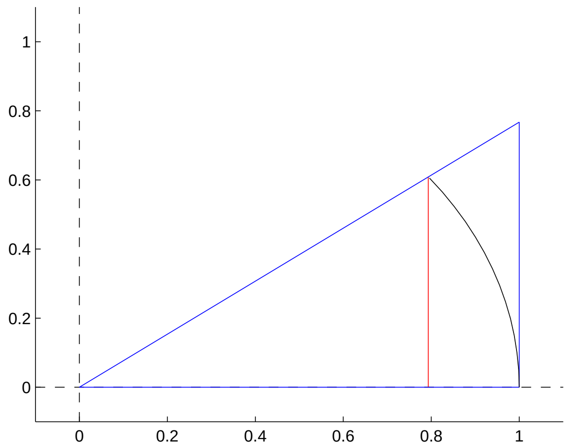
Rechenregeln: Beamerfolie 51, Prof. Hinze

Beispiel 2 Beamerfolie 52, Prof. Hinze:

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\,, s(x) := \frac{\sin(x)}{x}\,.$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ ?$$





Definition: Beamerfolie 53, Prof. Hinze

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt, also g.d.w.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

f heißt **linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig** in $x_0 \in D$, wenn

für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) in D

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Definition: $\epsilon - \delta$ Beamerfolie 54, Prof. Hinze

Beispiele: Beamerfolien 55-59, Prof. Hinze: