Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

24. November 2015

Notizen

Cauchy Kriterium: (a_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) Cauchy Folge (CF), d.h.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geq n_0}:\ |a_n-a_m|<\varepsilon$$

Liefert Existenzaussage über den Grenzwert, der Grenzwert der Folge kommt nicht in der Definition einer CF vor.

Nachweis von "$\Longrightarrow$": Sei $\varepsilon>0$. Dann gilt wegen Konvergenz

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall_{n\geq n_0},\qquad |a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall_{m\geq m_0},\quad \text{also}$$

$$|a_n-a_m| \leq |a_n-a|+|a-a_m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad \forall_{n,m\geq \underbrace{\max\{m_0,n_0\}}_{=:\tilde{n}_0}}$$

Teilfolgen einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; Seien $n_1<n_2<n_3<\dots<n_k<\dots$

Notizen

natürliche Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bsp i.) $a_n := (-1)^n$ und $n_k := 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall_{k\in\mathbb{N}}$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = 1$ ist 1 ein $\overbrace{\text{Häufungspunkt}}^{\text{Hfpkt}}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Der andere Hfpkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist -1, denn mit $n_k := 2k-1$ $k\in\mathbb{N}$ gilt $a_{n_k} = (-1)^{2k-1} = -1 \quad \forall_{k\in\mathbb{N}}$.

Zurück zu Bolzano Weierstraß I: Jede beschränkte monotone Folge (a_n) ist konvergent und zwar mit

$$\lim a_n = \begin{cases} S := \sup\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}, & \text{falls } (a_n) \text{ monoton wachsend} \\ u := \inf\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}, & \text{falls } (a_n) \text{ monoton fallend} \end{cases}$$

Notizen

Nachweis: nur für (a_n) monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

zeige: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} : s - a_n < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die Definition von s gestattet nun die Wahl eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$$

$$\longrightarrow \quad s - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$ Das war zu zeigen $\boxtimes$.

Bolzano-Weierstraß II: Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (TF), d.h. es gibt einen Häufungspunkt ξ von (a_n) und eine TF $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \xi$

Notizen

Nachweis konstruktiv mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens:

Algorithmus: Eingabe von oberer und unterer Schranke der Folge (a_n),

$$A \le a_n \le B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i.) $k := 1$, $A_1 := A$, $B_1 := B$

ii.) $M := \frac{1}{2}(A_k + B_k)$ Intervallmitte

iii.) Falls $\{n;\ a_n \in [A_k, M]\}$ unendlich groß: $A_{k+1} := A_k$, $B_{k+1} := M$

ansonsten (d.h. $\{n;\ a_n \in [M, B_k]\}$ unendlich groß): $A_{k+1} := M$, $B_{k+1} := B_k$

iv.) $k = k+1$ und gehe zu ii).

Notizen

Damit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, und beide Folgen sind beschränkt. D.h. mit Bolzano-Weierstraß I

$$\begin{array}{ccccc} B_k & - & A_k & = & \frac{1}{2^{k-1}}(B-A) \\ {\scriptstyle k\to\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \quad \text{geom. Folge} \\ z & & s & & 0 \end{array},$$

d.h. $z = s$

Wähle noch die TF aus, d.h. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen:

Wähle dazu $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$. Das ist möglich, weil in Schritt ii) immer eine ∞-große Menge ausgewählt wird.

Damit dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = z$ (weil $z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [A_k, B_k]$ Schnittmenge). $\boxtimes$

Notizen

Bsp: $a_n := (-1)^n$. Dann $-2 =: A \leq a_n \leq 2 =: B$

Unser Algorithmus liefert $z = -1$

Abfrage in iii) umdrehen liefert $z = 1$!

Das sind die Hfpkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Anwendung von Bolzano I: Sei $s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$. Dann (s_n) monoton wachsend und auch beschränkt, denn mit

$$\frac{1}{j!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j} \leq \frac{1}{1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{j-1 \text{ mal}}} = 2^{1-j}$$

gilt

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} 2^{1-j} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j}$$

Notizen

$$\Rightarrow \quad s_n \le 1 + \underbrace{\underbrace{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}_{\le 2}}_{\le 3}, \quad \text{weil} \quad \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

BW I: $\lim_{n\to\infty} s_n =: e \le 3$ Eine Definition der Euler'sch Zahl e!

Alternierende Reihen, das Leibniz Kriterium:

Sei $s_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i$ mit $a_i \ge 0$, $\lim a_i = 0$, $a_{i+1} \le a_i$

Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent!

Bsp $a_i := \frac{1}{i+1}$. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i+1} =: \ln(2)$

Notizen

Nachweis Leibniz Kriterium:

Setze
$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k, \qquad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = u_n + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\substack{\cancel{\leq}\, 0 \\ \geq}} \geq u_n$$

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k = v_n + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n+2})}_{\substack{\cancel{\geq}\, 0 \\ \leq}} \leq v_n$$

Ferner:
$$v_n = u_n + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq u_n \quad \longrightarrow \quad (u_n), (v_n) \text{ beschränkt.}$$

Notizen

BWI $\quad v_n \xrightarrow{n\to\infty} a \xleftarrow{n\to\infty} u_n$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ existiert und ist gleich a. Ferner gilt

$$u_n \le \sum_{k=0}^{2l-1} (-1)^k a_k \le \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k a_k \le v_n \quad \text{für } l \ge n$$

D.h. $\quad u_n \le a \le v_n$. $\quad \boxed{B}$.

Wir wissen: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ konvergent. Gilt dies auch für

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \;?$$

Nein, weil

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}^{\ge \frac{1}{2}} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \overbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}^{\ge \frac{1}{2}} + \overbrace{\left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right)}^{\ge \frac{1}{2}} + \dots \ge 1 + n\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Notizen

$\hookrightarrow$ Absolute Konvergenz.

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

26. November 2015

Notizen

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy Folge (CF) in $\mathbb{R}$ konvergiert und es gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent

"$\Leftarrow$" Wir haben $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0}\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

Zeige: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geq n_0}: |a_n-a_m|<\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$. Dann gilt

$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \leq |a_n-a|+|a-a_m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \boxtimes$$

falls $m\geq n\geq n_0$.

Universität Hamburg

Notizen

Sätze von Bolzano Weierstraß

I Jede monotone beschränkte Folge (a_n) ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n;\, n\in\mathbb{N}\}, & \text{falls } (a_n) \text{ monoton steigend} \\ \inf\{a_n;\, n\in\mathbb{N}\}, & \text{falls } (a_n) \text{ monoton fallend} \end{cases}$$

Nachweis: nur für $\sup\{a_n;\, n\in\mathbb{N}\} =: S$.

Zeige: $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists n_0\, \forall_{n\geq n_0}: \underbrace{S-a_n}_{\geq 0} < \varepsilon$

Nach Def von S gibt es $n_0\in\mathbb{N}$, s.d. $S-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S \quad \forall_{n\geq n_0}$

$\longrightarrow \quad S-a_n < \varepsilon \quad \forall_{n\geq n_0}$. Das war zu zeigen. $\boxtimes$

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notizen

Hfpkt = Häufungspunkt

Bsp: $a_n = (-1)^n$ $\quad n_k := 2k$. Dann $a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$

Häufungspunkte von (a_n) sind 1 und -1, weil $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 1 und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1 konvergiert.

Bolzano Weierstraß II: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge (TF)

<u>Nachweis</u>: Mittels Intervallhalbierungsverfahren

Wir haben mit $-\infty < A \le B < +\infty$: $A \le a_n \le B \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Notizen

Algorithmus: Eingabe A, B, $k=1$

i.) Initialisierung: $A_1 := A$, $B_1 := B$

ii) $M := \frac{1}{2}(A_k + B_k)$

iii) Falls $|\{n;\ a_n \in [A_k, M]\}|$ unendlich groß: $A_{k+1} := A_k$, $B_{k+1} := M$

ansonsten (d.h. $|\{n;\ a_n \in [M, B_k]\}|$ unendlich groß): $A_{k+1} := M$, $B_{k+1} := B_k$

iv.) $k = k+1$, gehe zu ii)

Wir erhalten

$$A \leq A_k \leq B_k \leq B$$

und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton steigend, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Damit $B_k \xrightarrow{k\to\infty} z$, $A_k \xrightarrow{k\to\infty} s$. Es gilt $z = s$, weil

$$B_k - A_k = \frac{1}{2^{k-1}}(B-A) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Notizen

Wähle nach die TF $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ aus. Dazu $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$ und beachte bei der Auswahl, dass $n_{k+1} > n_k$ ist. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = z = s = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} [A_k, B_k] \quad \text{Schnittmenge.} \quad \boxtimes$$

Bsp: $a_n = (-1)^n$, $A = -1.5$, $B = 1.5$. Dann mit Auswahlregel iii): $z = s = -1$. Abhängig von Abfrage in iii). Wird diese umgekehrt, kommt $z = s = 1$ heraus!

Konvergenz von Reihen: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Reihe, d.h. $(s_n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Notizen

Notwendig: $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$, denn $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{m,n\geq n_0}: |\underbrace{S_n - S_m}_{\sum_{j=m+1}^{n} a_j}| < \varepsilon$

nach dem Cauchy Konvergenzkriterium.

Wähle hier ohne Einschränkung (OE) $m < n$ und $n = m+1$.

Dann $\sum_{j=m+1}^{n} a_j = a_{m+1}$, also $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Nullfolge (NF)

Bsp $S_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$. Dann $S_{n+1} \geq S_n$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ und

(S_n) beschränkt, genauer gilt $S_n \leq 3$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$, weil

$$\frac{1}{j!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j} \leq \frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{j-1 \text{ mal}}} = 2^{1-j} \longrightarrow S_n \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} \leq 3,$$

Notizen

weil $\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 2$. Damit existiert $\lim_{n\to\infty} s_n =: e$

Bsp $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j+1}$ ergibt eine alternierende Reihe.

Beh.! $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dies folgt aus dem

Leibniz Kriterium für alternierende Reihen

Seien $s_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j$, $a_j \geq 0$ $\forall_{j\in\mathbb{N}}$, $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ und $a_{j+1} \leq a_j$ $\forall_{j\in\mathbb{N}}$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ endlich.

Notizen

Nachweis: Sei $u_n = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j a_j$, $v_n = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j a_j$

Damit

$$u_{n+1} = u_n + \overbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}^{\geq 0} \geq u_n \qquad (u_n) \text{ monoton steigend}$$

$$v_{n+1} = v_n + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n+2})}_{\leq 0} \leq v_n \qquad (v_n) \text{ monoton fallend}$$

Ferner: $v_n = u_n + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq u_n \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}$

und $v_n - u_n = a_{2n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ n. Voraussetzung $\Rightarrow (u_n), (v_n)$ beschränkt.

Damit für $l \geq n$:

$$u_n \leq \underbrace{\sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j a_j}_{u_l} \leq \underbrace{\sum_{j=0}^{2l} (-1)^j a_j}_{v_l} \leq v_n \qquad \forall_{l \in \mathbb{N}}$$

Universität Hamburg

Notizen

Damit gilt $\lim_{n\to\infty} u_n = S = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ $\boxed{\text{Bew.}}$

In unserem Beispiel: $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{1+j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{1+j} =: \ln 2$

Was ist denn mit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$? Nicht konvergent, denn

$$1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{32}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots \;\hat{=}\; 1 + n\,\frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$\boxed{\text{B}}$

$\leadsto$ absolute Konvergenz von Reihen