Buch Kap. 1.7.2 – Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Sei $z = a + b\,i$. Dann gilt mit $r := |z|$

$$a = r\cos\phi\ ,\ b = r\sin\phi\ ,\ r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \tan\phi = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = |z|(\cos\ \phi + i\ \sin\ \phi)$ und $w = |w|(\cos\ \psi + i\ \sin\ \psi)$ in Polarkoordinatendarstellung ergibt sich

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\ \sin(\phi + \psi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen z und w ($|w| \neq 0$) ergibt sich

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\ \sin(\phi - \psi)),$$

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1: (reelle Funktion einer reellen Veränderlichen)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.
$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt Definitionsbereich und

$$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$$

Wertebereich von f.
Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$$f(A) := \{y \in B | \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$$

die Bildmenge von A, und

$$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$$

die Urbildmenge von B.

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- **injektiv (eineindeutig), falls**

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

- **surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),**

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \quad b = f(a).$$

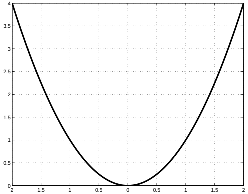
- **bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.**

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

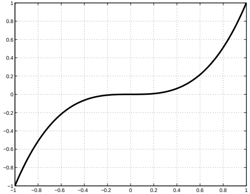
- $D(f) = D(g)$ **und**
- $f(x) = g(x)$ **für alle** $x \in D(f)$

gilt.

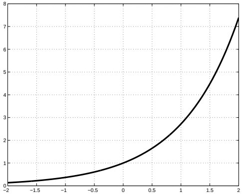
Buch Kap. 2.1 – einige Funktionen



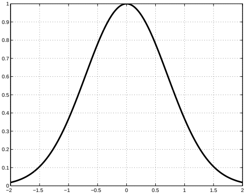
x^2



x^3

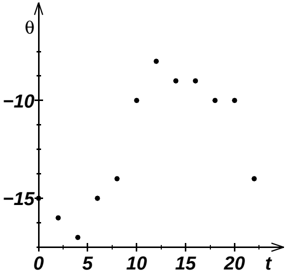


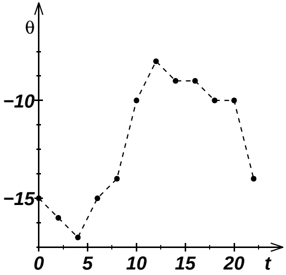
e^x



e^{-x^2}

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion





Links: Abb. 2.2, Temperaturmessreihe $\theta(t)$. Rechts: Abb. 2.3, Temperaturmessreihe linear interpoliert.

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Definition 2.2: (Umkehrfunktion f^{-1})

Ist $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ bijektiv, so ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet. Damit ist eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ gemäß

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{falls} \quad y = f(x),$$

definiert, welche <u>Umkehrfunktion</u> zu f heißt.

Natürlich ist dann auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv.

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

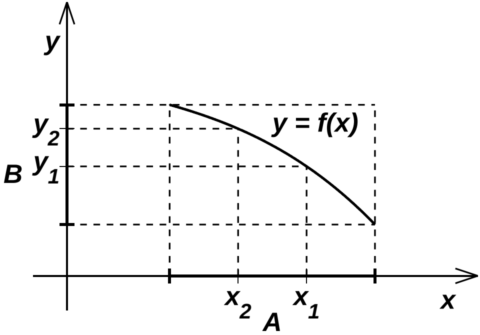


Abbildung 2.4: Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$ einer bijektiven Funktion $y = f(x)$ ist bijektiv

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

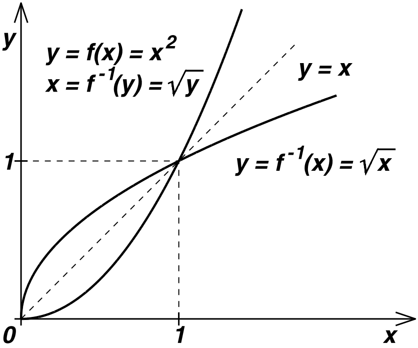


Abbildung 2.5: Umkehrfunktion $y = \sqrt{x}$ zu $y = x^2$, $A = B = \mathbb{R}_{\geq 0}$

Buch Kap. 2.1 – Umkehrfunktion

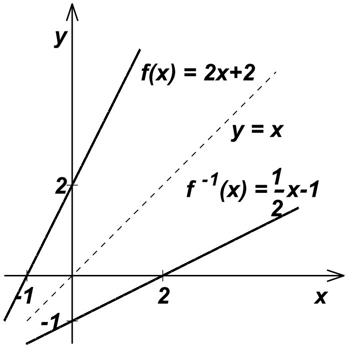
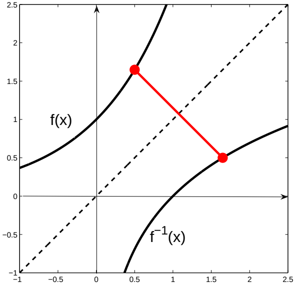


Abbildung 2.6: Funktion und Umkehrfunktion einer linearen Abbildung

Buch Kap. 2.1 – Berechnung der Umkehrfunktion

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1) **$y = f(x)$ nach x auflösen $\to x = f^{-1}(y)$,**
2) **x und y vertauschen $\to y = f^{-1}(x)$.**



$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$

Buch Kap. 2.1 – Verkettung von Funktionen

Definition 2.3: (Verkettung von Funktionen)
Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$ gegeben, so ist jedem $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und diesem durch die Funktion g das Element $g(f(x)) \in D$.

Das Nacheinanderausführen von f und g liefert eine Funktion

$$h = g \circ f : A \to D.$$

Wir nennen $h = g \circ f$ zusammengesetzte oder verkettete Funktion.

Buch Kap. 2.2 – Gerade und Ungerade bei Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei D symmetrisch zur 0 liege, d.h. mit $x \in D$ sei auch $-x \in D$.

Definition 2.7: (gerade und ungerade Funktionen)
f heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array} \right\}$$

für alle $x \in D$ erfüllt ist.