Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{6^{k+1}+5^k}{7^k}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \sin(x)}{\cos(x)-1}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x) = 4x^2 - \frac{3}{2}x + \cos(\frac{\pi}{4}x) - 2$ genau zwei reelle Nullstellen hat.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) **(2 + 2 Pnkte)**

(i)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^{k+1}+5^k}{7^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^{k+1}}{7^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k} \\ &= 6\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{7^k}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k} = \frac{6}{1-\frac{6}{7}} + \frac{1}{1-\frac{5}{7}} = 42 + \frac{7}{2} = 45.5\end{aligned}$$
.

(ii)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin(x)}{\cos(x)-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x\cdot\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+\cos(x)-x\cdot\sin(x)}{-\cos(x)} = -2\end{aligned} .$$

b)
$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 - \frac{3}{2}x + \cos(\frac{\pi}{4}x) - 2, \\ f'(x) &= 8x - \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(\frac{\pi}{4}x)\,, \\ f''(x) &= 8 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cos(\frac{\pi}{4}x) \ge 8 - \left(\frac{4}{4}\right)^2 = 7.\end{aligned}$$

Da f'' keine Nullstellen hat, hat f höchstens zwei Nullstellen (Rolle).
(3 Punkte)

Es gilt $f(0) = -1$ und

$f(-2) = 16 + 3 + \cos(\frac{-\pi}{2}) - 2 = 17 > 0$.

$f(2) = 16 - 3 + \cos(\frac{\pi}{2}) - 2 = 11 > 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens eine Nullstelle im Intervall $]-2;0[$ und mindestens eine Nullstelle im Intervall $]0;2[$.

Insgesamt folgt, dass f genau zwei Nullstellen hat. [**3 Punkte**]

Aufgabe 2: Kurvendiskussion

Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) \;=\; \exp(\,x^3-3x^2-24x\,)\;-\;1 \;=\; e^{(x^3-3x^2-24x)}\;-\;1\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie die Extrema von f.

b) In welchen Intervallen steigt f und in welchen Intervallen fällt f monoton?

c) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

Lösung 2:

a) Da die Exponentialfunktion streng monoton steigt, genügt es das Monotonieverhalten von $h(x) := x^3-3x^2-24x$ zu untersuchen.

$h'(x) = 3x^2-6x-24 = 3(x^2-2x-8) \overset{!}{=} 0$

liefert als Kandidaten für Extrema $x_1=-2,\ x_2=4$.

[**ALTERNATIV:** Wer dennoch mit f arbeitet, erhält

$f'(x) = (3x^2-6x-24)\exp\left(x^3-3x^2-24x\right) \overset{!}{=} 0$

mit dem gleichen Ergebnis.]

(3 Punkte)

Zur Klassifikation bestimmen wir die zweite Ableitung von h oder f, und werten diese für die Kandidaten aus.

$h''(x) = 6x-6\,. \qquad h''(-2) = -18,\ h''(4) = 18\,.$

[**ALTERNATIV**

$f''(x) = (3x^2-6x-24)^2\exp\left(x^3-3x^2-24x\right)+(6x-6)\exp\left(x^3-3x^2-24x\right)$

$f''(-2) = 0+(-12-6)\exp\left(-8+12+48\right)$

$f''(4) = 0+(24-6)\exp(4^3-3\cdot 16-24\cdot 4)$]

$h''(-2)$ (bzw. $f''(x)$) ist negativ. In $x_1 = -2$ liegt ein Maximum vor.

$h''(4)$ (bzw. $f''(4)$) ist positiv. In $x_2 = 4$ liegt ein Minimum vor.

(3 Punkte)

b) h (bzw. f) kann das Monotonieverhalten nur in x_1 und x_2 ändern.

Da in $x_1=-2$ ein Maximum liegt, muss f in $]-\infty,\,-2[$ streng monoton steigen und in $]-2,\,4[$ streng monoton fallen. Da in $x_2=4$ ein Minimum vorliegt, steigt f in $]4,\infty[$. **(2 Punkte)**

[**Alternativ:**

Es gilt:

$$h'(x) = 3(x^2 - 2x - 8) \begin{cases} > 0 & \forall x \in]-\infty, -2] \\ & \Longrightarrow f \text{ wächst streng monoton in }]-\infty, 0[\\ < 0 & \forall x \in]-2, 4[\\ & \Longrightarrow f \text{ fällt streng monoton in }]-2, 4[\\ > 0 & \forall x \in]1, \infty[\\ & \Longrightarrow f \text{ wächst streng monoton in }]4, \infty[\end{cases}$$

]

c) $f(x) = 0 \iff e^{x^3 - 3x^2 - 24x} - 1 = 0 \iff e^{x^3 - 3x^2 - 24x} = 1$

$\iff x^3 - 3x^2 - 24x = x(x^2 - 3x - 24) = 0\,.$

Also $x = 0$ oder $x^2 - 3x - 24 = 0\,.$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms erhält man aus der $p{-}q{-}$ Formel oder mittels quadratischer Ergänzung:

$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 24 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+24\cdot 4}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}\,.$ **(2 Punkte)**