Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1:

a) Gegeben ist das Intervall $I := [-4, 2]$ die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & x \in [-4, -2) \\ 2 - (x+1)^2 & x \in [-2, 0) \\ 1 + x & x \in [0, 2] \end{cases}$$

(i) Ist f stetig?

(ii) Bestimmen Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f in I.

b) (l'Hospital) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von Bernoulli, l'Hospital

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sinh x}{x^3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln(1 + x^2)$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $a_n := \sqrt[n]{n}\,,\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x + e^{x-1} + \cos(1-x) - 2$.

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $]-1, 1[$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Zeigen Sie, dass für den Restterm R_2 folgende Abschätzung gilt:

$$|\,R_2(x)\,| = |\,f(x) - T_2(x)\,| \le 10^{-3} \qquad \forall\, x \in [0.9,\, 1.1]\,.$$

Aufgabe 3: (Klausur 2014)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+3}$.

a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen f', f'' und f''' von f.

b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

c) Zeigen Sie, dass für das Taylor-Restglied $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$ im Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\}$ die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{500}$$

gilt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) = \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right).$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Extrema von f. **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Abgabetermine: 25.01 - 29.01.2016