Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1) Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, kreuzen Sie bei mehreren Auswahlmöglichkeiten die richtige(n) Zeile(n) an, und tragen Sie gegebenenfalls in den angekreuzten Zeilen Ihre Antworten in die dafür vorgegebenen Kästchen ein.

a) Welche der folgenden Aussagen über reellwertige stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind wahr?

- ☐ Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.
- ☐ Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt mindestens eine Nullstelle.
- ☐ Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat ein Minimum.
- ☐ Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
- ☐ Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

b) Es sei $M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 1 + \frac{3}{n} \right\}$.

- ☐ Dann ist $\inf M = \min M$ $\boxed{=\quad}$
- ☐ Dann ist $\sup M = \max M$ $\boxed{=\quad}$
- ☐ $\min M$ existiert nicht und es ist $\inf M$ $\boxed{=\quad}$
- ☐ $\max M$ existiert nicht und es ist $\sup M$ $\boxed{=\quad}$
- ☐ Weder $\sup M$ noch $\inf M$ existieren.

Aufgabe 2: (6+4 Punkte)

a) Begründen Sie , warum jede

(i) stetige gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \qquad f(-2) = -2, \qquad f(1) = 1$$

mindestens vier Nullstellen hat, und

(ii) jede stetige ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \qquad f(-2) = 2, \qquad f(1) = 1$$

mindestens fünf Nullstellen hat.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x + \cos(x) - 3\,.$

(i) Zeigen Sie, dass f im Intervall $I := [0, 2]$ mindestens eine Nullstelle hat.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens und eines (Taschen-) Rechners eine Näherung $\hat{x}$ für eine Nullstelle x_0 aus I, für die $|\hat{x} - x_0| \leq 0.01$ gilt.

Aufgabe 3:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 3x^3 + 2x^2 + ax + b & x > 0\,. \end{cases}$$

Dabei seien a und b reelle Parameter.

(i) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

(ii) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0, 1] \\ A \sin(\omega x) & x \in (1, 2] \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0, 2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = 2\cos(x)\sin(x),$$

$$f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \frac{2}{(1-x)^n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest,}$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_4(x) = \frac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest,}$$

$$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad f_5(x) = \sqrt[x]{x}.$$

Abgabetermine: 11.01 - 15.01.2016