

# Analysis I

## für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 5

**Aufgabe 1:** (6+4 Punkte)

Es sei  $r$  eine feste reelle Zahl und  $a_n := \cos(n\pi) \left[ \left( \frac{r-1}{5} \right)^n - 1 \right]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Bitte kreuzen Sie im folgenden die richtigen Aussagen an und füllen Sie gegebenenfalls den Kasten aus.

Die Folge  $(a_n)$

- konvergiert für alle  $r \in \mathbb{R}^+$ .
- konvergiert genau dann, wenn  $|r| < 1$  gilt.
- divergiert für alle  $r \in \mathbb{R}^+$  mit  $r > 6$ .
- konvergiert genau dann, wenn  $r = 6$  gilt.

hat für  $r \in (-4, 4)$  die Häufungspunkte 

$h_1 =$	$h_2 =$
---------	---------

- b) Begründen Sie Ihre Antworten aus Teil a).

**Aufgabe 2:** (Je 2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})^n$

c)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{(k+1)!}$       d)  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left( \frac{k+3}{k} \right)^k$

e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k-1}}{5^{k-1}}$

**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(2k+1)(k+2)}$  konvergiert.

Sei  $s$  der Grenzwert der Reihe und  $s_n$  die Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{(2k+1)(k+2)}.$$

Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert  $s$  der Reihe an.

Geben Sie eine natürliche Zahl  $n$  an, so dass der Abbruchfehler  $|s_n - s|$  kleiner als 0.01 wird.

#### Aufgabe 4:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in dem jeweils angegebenen Punkten  $x_0$  einen linksseitigen und/oder einen rechtsseitigen Grenzwert haben. Welche Funktionen sind in  $x_0$  stetig?

a)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2x} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x_0 = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x_0 = 0 \end{cases}$$

d)

$$l(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x > 0 \\ x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 0$$

e)

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1, 3\} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{1, 3\} \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 1$$

Abgabetermine: 14.12 - 18.12.2015