

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

- a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ an.

i) $z_1 = (3 + 4i)(\overline{3 + 4i})$, ii) $z_2 = (3 + 3i)^2$, iii) $z_3 = \frac{3 + 4i}{3 - 4i}$.

- b) Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(z)$ und geben Sie die Linearfaktorzerlegung von p an.

$$p(z) := z^3 + 4z^2 + 13z.$$

- c) Charakterisieren Sie durch eine Skizze oder mit Worten die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5\},$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\},$$

$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 2\},$$

$$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) = 0\}.$$

Aufgabe 2:

- a) Interpretieren Sie für $z \neq 0$ die Zuordnung $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ geometrisch.

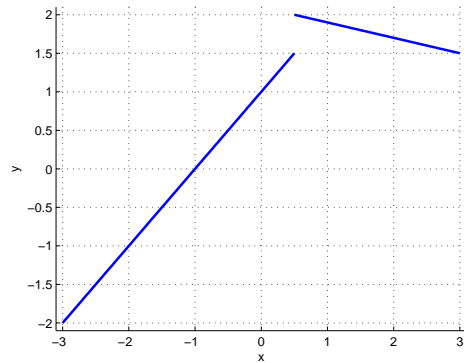
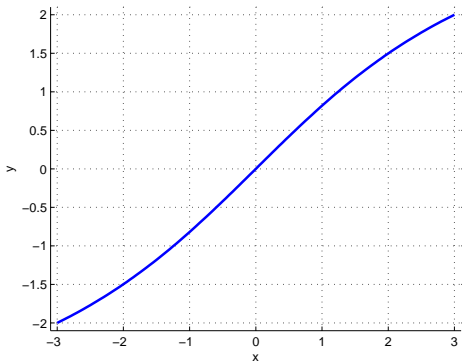
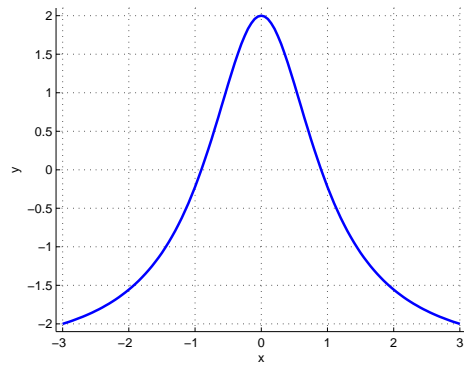
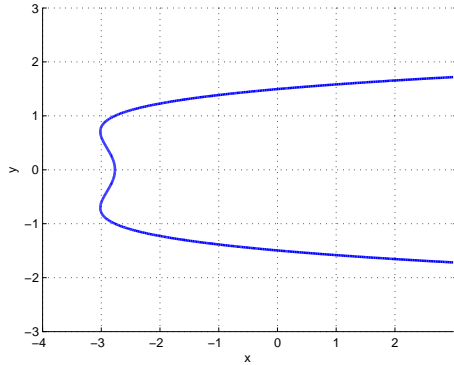
Tipp: Notizen zur Vorlesung 2, letzte Seite.

- b) Skizzieren Sie die unten angegebenen Mengen D_1 und D_2 und bestimmen Sie deren Bilder unter f aus a).

i) $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) = 3\operatorname{Im}(z)\}$, ii) $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Aufgabe 3:

- a) Bei welchen der folgenden Abbildungen kann es sich um die Darstellung des Graphen einer reellwertiger Funktion $f : [-3, 3] \rightarrow [-2, 2]$, $x \mapsto y = f(x)$, handeln?



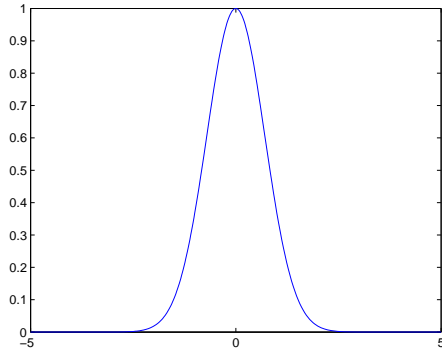
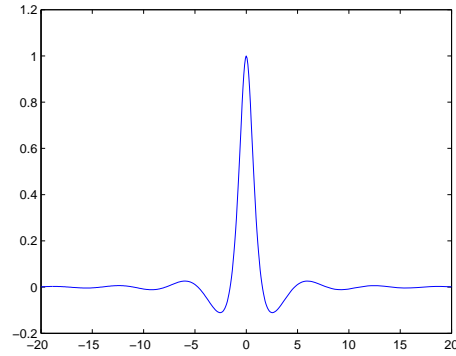
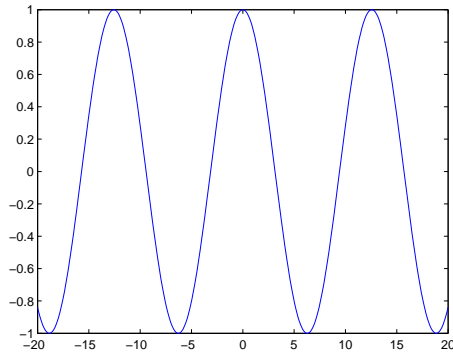
Welche der zugehörigen Funktionen sind - soweit erkennbar - injektiv bzw. surjektiv?

Welche der zugehörigen Funktionen sind - soweit erkennbar - bijektiv (umkehrbar/invertierbar)?

- b) In den untenstehenden Bildern sind die Graphen der Funktionen:

$$f_1(x) = \exp(-x^2) = e^{-x^2}, \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right), \quad \text{und} \quad f_3(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

dargestellt. Welches Bild gehört zu welcher Funktion?



Aufgabe 4: (4 + 3 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir reelle Funktionen einer reellen Variablen.

- a) (Verkettung von Funktionen/Umkehrfunktion) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ausdrücke definiert? Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_k(x) = x$?

<p>i) $f_1(x) = \sqrt{x^2}$</p> <p>iii) $f_3(x) = \exp(\ln(x))$</p>	<p>ii) $f_2(x) = (\sqrt{x})^2$</p> <p>iv) $f_4(x) = \ln(\exp(x))$</p>
---	---

- b) Es sei $y = f(x) := 5^{(x-2)}$. Bestimmen Sie

- den natürlichen Definitionsbereich D von f ,
- das Bild $B = f(D)$ von D unter f ,
- das Bild von $[2; \infty[$,
- sowie die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow D$.

Abgabe: 16 - 20.11.2015